( )
Л.Д. Е.М. 1963
7 1 292

目 录

第一章 导体的静电学

§1 导体的静电場

宏观电动力学的对象是研究被物质所充满的空間内的电磁場。和任何宏观理論一样，在电动力学中所处理的物理量是按照“物理无限小”体积元所求得的平均值，对于这些物理量因物质的分子結构而引起的微观变化，則不感兴趣。例如，不采用电場强度的实际“微观”值 e，我們将研究它的平均值，这平均值表示为

$$\bar{\mathbf{e}}=\mathbf{E} \tag{1.1}$$

对真空内的电磁場方程求平均值，就得到連續媒质电动力学的基本方程。这种从微观方程变换到宏观方程的方法，是由 Г. A. 洛倫茲首先提出的。

宏观电动力学方程的形状和所包含的物理量的意义，主要决定于媒质的物理性质以及場随时間变化的特性。因此，分别就每一类物理对象进行推导和研究这些方程，是很合理的。

大家知道，所有的物体按照它們的电学性质，可分成两大类——导体和电介质，前者和后者的区别是：一切电場在导体内引起电荷运动，即产生电流[①]。

我們从研究带电导体所产生的恒定电場开始(导体的静电学)，首先从导体的基本性质可知，在静电学的情况下，导体内的电場强度必須等于零。实际上，不为零的电場强度 E 将引起电流的产生；而且电流在导体内流动要引起能量的損耗，因而就不能自己(沒有

① 但是必须説明，这里假定了导体是均匀的(指成分、温度等)。如后文将讲到的，在不均匀的导体内可能存在电場，但不会引起电荷的运动。

外加电源)維持在稳定状态。

由此可知，导体上的全部电荷应該分布于导体表面，因为导体內部如果存在电荷，必然在导体內产生电場[1]；电荷沿导体表面的分布可以这样实現，使这些电荷在导体內部产生的电場互相抵銷。

因此，导体的靜电学問題，就归結为确定导体以外的眞空內的电場和电荷沿导体表面的分布。

在不十分靠近导体表面的各点处，眞空內的平均电場 $\mathbf{E}$，事实上和实在的电場 $\mathbf{e}$ 相等。离导体很近的地方必須发生了不規則的分子場的影响，这两个量才有差别。但是，后一情况并不会影响平均場方程的形状。眞空內的精确的麦克斯韦微观方程是

$$\operatorname{div}\mathbf{e}=0, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t} \tag{1.3}$$

(式中 $\mathbf{h}$ 是微观磁場强度)。因为假定平均磁場不存在，因而导数 $\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t}$ 經过平均后变成零；于是我們得到，眞空內的恒定电場滿足普通方程：

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=0, \tag{1.4}$$

这也就是势为 φ 的势場，势和电場强度的关系为

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi, \tag{1.5}$$

并且滿足拉普拉斯方程：

$$\Delta\varphi=0. \tag{1.6}$$

电場 $\mathbf{E}$ 在导体表面上的边界条件，可从方程 $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$ 得出，这个方程[和起始方程(1.3)一样]在导体外和导体內都同样正确。我們选擇导体表面某一点的法綫方向为 z 軸。于是在导体表面的紧邻近，电場分量 E_z 达到很大的数值(由于在很小距离上存在一

[1] 从下面引入的方程(1.8)，可明显地看出这一点。

有限的电势差)。这种很大的場是导体表面的一种性质，并且决定于导体表面的物理特性，但和我們所研究的静电学問題沒有关系，因为当距离达到原子距离时，它已迅速降落。但是重要的是，导体表面如果是均匀的，那末沿导体表面的导数$\frac{\partial E_z}{\partial x}$，$\frac{\partial E_z}{\partial y}$仍保持有限值，尽管$E_z$本身会变成无穷大。因此，由

$$(\text{rot}\,\mathbf{E})_x=\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0$$

可知，$\frac{\partial E_y}{\partial z}$是有限的。这表明，在导体表面上，$E_y$是連續的(因为$E_y$的突变表明导数$\frac{\partial E_y}{\partial z}$变为无穷大)。同样$E_x$也是如此，但是因为在导体內总是$\mathbf{E}=0$，所以我們得到結論：在导体表面上，外电場的切向分量必須变为零：

$$\mathbf{E}_t=0. \tag{1.7}$$

由此可見，在导体表面的每一点处，靜电場应垂直于导体表面。因为$\mathbf{E}=-\text{grad}\,\varphi$，因而这表明在任何导体的全部表面上，电場势应为常数。換句話說，均匀导体的表面是静电場的等势面。

垂直于导体表面的电場分量和分布于导体表面的电荷密度之間，存在一个非常簡单的关系，这关系可从普遍的电动力学方程$\text{div}\,\mathbf{e}=4\pi\rho$得出，这方程經平均后給出

$$\text{div}\mathbf{E}=4\pi\overline{\rho}, \tag{1.8}$$

式中$\overline{\rho}$是平均电荷密度。大家知道，这方程写成积分形式表明，通过閉合面的电通量等于这閉合面所包圍的体积內的总电荷(乘上4π)。把这定理应用到无限靠近的两个单位面积所包圍的体积元上(两单位面积的两側和导体面接触)，并考虑到在內面的面积上$\mathbf{E}=0$，于是得到$E_n=4\pi\sigma$，式中σ是电荷的面密度，也就是导体表面单位面积上的电荷。因此，导体表面的电荷分布，由下式給出

$$4\pi\sigma = E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} \tag{1.9}$$

(場势导数取在导体表面的外法綫方向)。导体上的总电荷为

$$e = -\frac{1}{4\pi}\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}df, \tag{1.10}$$

式中的积分对导体的全部表面进行。

任何静电場内的电势分布，具有下面一种奇异性质：势函数$\varphi(x、y、z)$只在电場区域的边界上有极大値或极小値。这个定理也可表述成这样的說法：带到电場内的試験电荷 e 不可能保持稳定平衡，因为在电場内，沒有任何一点处的势能 $e\varphi$ 是极小値。

这个定理的证明是非常簡单的。例如，我們假設在某一点 A 处(不在場的边界上)电势有极大値。于是我們可以用一个很小的封閉面把 A 点包圍起来，在封閉面上各处的法向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial n}<0$。因而遍这个面的积分 $\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}df<0$。但是由于拉普拉斯方程：

$$\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}df = \int\Delta\varphi dV = 0,$$

这是和假設相矛盾的。

§2. 导体的静电場能量

現在我們来計算带电导体的静电場的总能量 $\mathscr{U}$[①]：

$$\mathscr{U} = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dV, \tag{2.1}$$

式中的积分对导体外的全部空間进行。我們把这积分变换如下：

---

① 平方 E^2 并不和导体表面附近以及导体內(此处 $E=0$，当然 $\overline{e^2}\neq0$)的实在場的均方值 $\overline{e^2}$ 相等。在計算积分(2.1)时，我們略去了不感兴趣的导体的內能和电荷与导体表面的亲和能。

$$\mathscr{U}=-\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\operatorname{grad}\varphi\cdot dV=-\frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\varphi\mathbf{E})dV+$$
$$+\frac{1}{8\pi}\int \varphi\operatorname{div}\mathbf{E}dV.$$

由于(1.4)式，第二个积分变为零，而第一个积分可以变换成遍包圍場的导体表面和遍无限远表面的积分。但是，后一积分由于場在无穷远处衰减得相当快，因而变成零。用下角标 a 表示导体，并用 φ_a 表示每个导体上的恒定电势值，于是得到①

$$\mathscr{U}=\frac{1}{8\pi}\sum_a\oint\varphi E_n df=\frac{1}{8\pi}\sum_a\varphi_a\oint E_n df.$$

末了，根据(1.10)式引入导体的总电荷 e_a，于是最后得到下列表达式:

$$\mathscr{U}=\frac{1}{2}\sum_a e_a\varphi_a, \tag{2.2}$$

这个式子和点电荷系統的能量表达式相类似。

导体的电荷和电势不可能同时用任意方式給定；在它們之間存在一定的关系。由于眞空內的場方程是綫性和齐次的，因而这种关系也必須是綫性的，即可用下列的关系式表示:

$$e_a=\sum_b C_{ab}\varphi_b, \tag{2.3}$$

式中的量 C_{aa}、C_{ab} 是长度的量綱，并且取决于导体的形状和它們的相互位置。量 C_{aa} 称为电容系数，而量 $C_{ab}(a\neq b)$ 称为静电感应系数。特别是，如果只有一个导体，則 $e=C\varphi$，其中 C 是电容；电容的数量級和导体的綫度相同。用电荷表示电势的逆式是

① 在这里和下面，变换体积分为面积分时，必須注意，E_n 是导体外法綫方向上的电場分量，这个方向和进行体积分的区域(即导体外的空間)的外法綫方向相反。因此，在变换时积分的正負号改变。

$$\varphi_a=\sum_b C^{-1}_{ab}e_b, \tag{2.4}$$

式中系数 C^{-1}_{ab} 所組成的矩陣是系数 C_{ab} 所組成的矩陣的逆矩陣。

現在来計算导体系統当其电荷或电势发生无穷小变化时的能量变化。将初始方程(2.1)变分，我們得到

$$\delta\mathscr{U}=\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{E}\delta\mathbf{E}dV,$$

这个表达式可以用两种等效的方法进一步变换。代入 $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$，并注意到变分后的場，和初始場一样，滿足方程(1.4)(因而 $\operatorname{div}\delta\mathbf{E}=0$)，于是我們有

$$\delta\mathscr{U}=-\frac{1}{4\pi}\int\operatorname{grad}\varphi\cdot\delta\mathbf{E}dV=-\frac{1}{4\pi}\int\operatorname{div}(\varphi\delta\mathbf{E})dV=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_a\varphi_a\oint\delta E_n df,$$

或者最后写成

$$\delta\mathscr{U}=\sum_a\varphi_a\delta e_a, \tag{2.5}$$

也就是我們得到用电荷变化所表示的能量变化。但是，显而易見，这結果也就是将无穷小电荷 δe_a 从无穷远处(其电場势等于零)带到給定导体上所必須作的功。

另一方面，可以写出

$$\delta\mathscr{U}=-\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{E}\operatorname{grad}\delta\varphi\cdot dV=-\frac{1}{4\pi}\int\operatorname{div}(\mathbf{E}\delta\varphi)dV=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_a\delta\varphi_a\oint E_n df,$$

或者写成

$$\delta\mathscr{U}=\sum e_a\delta\varphi_a, \tag{2.6}$$

也就是能量变化可用导体的电势变化来表示。

公式(2.5)和(2.6)指明，将能量$\mathscr{U}$对电荷求微分，我們就得到导体的电势，而$\mathscr{U}$对电势的导数給出电荷值：

$$\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial e_a}=\varphi_a, \quad \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \varphi_a}=e_a, \tag{2.7}$$

另一方面，电势和电荷互相为綫性函数。利用(2.3)式，我們有

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b}=\frac{\partial e_b}{\partial \varphi_a}=C_{ba},$$

改变微分的次序，我們得到C_{ab}。由此可見，

$$C_{ab}=C_{ba} \tag{2.8}$$

(同样$C^{-1}_{ab}=C^{-1}_{ba}$)。于是能量$\mathscr{U}$可以表示成电势或电荷的二次式：

$$\mathscr{U}=\frac{1}{2}\sum_{a,\,b} C_{ab}\varphi_a\varphi_b=\frac{1}{2}\sum_{a,\,b} C^{-1}_{ab}e_a e_b. \tag{2.9}$$

这个二次式和初始式子(2.1)一样，必須取有限的正值。从这条件可导出系数C_{ab}所滿足的不等式。特别是，全部电容系数都是正的：

$$C_{aa}>0. \tag{2.10}$$

(以及$C^{-1}_{aa}>0$)①

相反地，全部静电感应系数都是負的：

$$C_{ab}<0, \quad (a\neq b). \tag{2.11}$$

从下面的簡单討論，可以明显地看出这种情况。假設全部导体，除其中第a个导体外，一律接地，也就是說，它們的电势都等于零。于是由第a个带电导体在某一导体b上所感生的电荷等于$e_b=C_{ba}\varphi_a$。十分显然，感生电荷的正負号和感应电势的正負号相反，因而$C_{ab}<0$。根据静电場的电势在导体外不可能达到极大値和极小値，可以更严格地证明这一点。例如，假設唯一未接地的导

① 我們也可证明，在(2.3)式为正值的条件下，还出現不等式：$C_{aa}C_{bb}>C^2_{ab}$。

体的电势为$\varphi_a>0$。于是在全部空間內，电势也将是正的，只在接地导体上，电势才达到最小值(零值)。由此得出，在接地导体的表面，电势的法向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$是正的，而按照(1.10)式，它們的电荷是负的。

根据相似的考虑，可以证明$C_{ab}^{-1}>0$。

导体的静电場能量具有某种极值的性质，誠然，这性质与其說是物理的特征，无宁說是一种形式的特征。为了导出这种性质，我們假設导体上的电荷分布发生了一无穷小的变化(但每个导体的总电荷不变)，因而电荷也有可能落入导体的內部；这时我們撇开不談这种电荷分布实际上不可能是稳定的。現在我們来研究相应的积分的变化：

$$\mathscr{U}=\frac{1}{8\pi}\int E^2dV,$$

这个积分現在必須扩展到全部空間，包括导体本身的体积在內(因为电荷移动以后，电場$\mathbf{E}$一般說来在导体內部也不为零)。我們写出

$$\delta\mathscr{U}=-\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{grad}\varphi\cdot\delta\mathbf{E}dV=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\varphi\cdot\delta\mathbf{E})\,dV+\frac{1}{4\pi}\int\varphi\operatorname{div}\delta\mathbf{E}dV.$$

第一个积分变换成对无穷远表面的积分以后变成零。在第二个积分內，由于(1.8)式，我們得到$\operatorname{div}\delta\mathbf{E}=4\pi\delta\bar{\rho}$，因此，

$$\delta\mathscr{U}=\int\varphi\delta\bar{\rho}dV.$$

但是如果φ相应于实在的静电場，这个积分变成零，因为在这种情况下，在每个导体內部，$\varphi=$常数，而积分$\int\delta\bar{\rho}dV$对导体的全部体积进行积分后等于零，因为导体的总电荷保持不变。

由此可見，眞实的靜电場能量，和电荷沿导体体积作其他任何分布时所产生的电場能量比較，为极小值[①]（湯姆逊定理）。

具体地說，从这定理可以得出这样的結果：将不带电的导体带到給定电荷（带电导体）的电場內，則使电場的总能量减小。为了证明这一点，我們只要比較一下未带电导体引入后所建立的眞实电場的能量和相应于被引入的导体上不存在感生电荷时的虛电場能量，就足够了。第一种能量因为是可能的极小值，所以小于第二种能量，而后者則和原来电場的能量相等（因为不存在感生电荷，电場"透入"导体內部而无任何变化）。这一結果也能够表述成另一种形式：离电荷系統很远的不带电导体，会受到电荷系統的吸引。

最后可以证明，带到靜电場內的导体（带电的或不带电的），只在电力的作用下，一般不可能保持稳定平衡。这个論断推广了前一节末尾所证明的点电荷的相似定理；由結合应用点电荷定理和湯姆逊定理，就可以得出这种論断；我們在这里不准备作相应的討論。

用公式 (2.9) 来計算各个导体彼此分开有限距离的导体系統的能量是非常方便的。但是要計算均匀外电場 $\mathfrak{E}$（可以想像为由无穷远处的电荷所产生的）內未带电导体的能量，則需要作特别的研究。根据(2.2)式，这能量等于$\mathscr{U}=\frac{1}{2}e\varphi$，其中 e 是产生电場的远处电荷，而 φ 是所研究的导体在电荷 e 所在的点处所产生的电勢（从$\mathscr{U}$內消去了电荷 e 在其本征場內的能量，因为它与我們要計算的导体能量无关）。导体的电荷虽然等于零，但在外电場的作用下，导体得到电偶极矩，我們用$\mathscr{P}$表示它。大家知道，电偶极子在

① 我們在此处不准备給出簡单的討論，以說明我們所指的是极小值，而一般不是指极值。

很大距离 $\mathbf{r}$ 处的場势是 $\varphi=\frac{\mathscr{D}\mathbf{r}}{r^3}$。因此

$$\mathscr{U}=\frac{e\mathscr{D}\mathbf{r}}{2r^3},$$

但是$\frac{e\mathbf{r}}{r^3}$是电荷 e 所产生的电場强度 $\mathfrak{E}$。所以

$$\mathscr{U}=-\frac{1}{2}\mathscr{D}\mathfrak{E}. \tag{2.12}$$

因为全部場方程都是綫性的，因而十分显然，偶极矩$\mathscr{D}$的分量是电場强度 $\mathfrak{E}$ 的分量的綫性函数。$\mathscr{D}$ 和 $\mathfrak{E}$ 間的比例系数的量綱是长度的立方，因而和导体的体积成正比:

$$\mathscr{D}_i=V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k, \tag{2.13}$$

式中系数 α_{ik} 只与导体的形状有关。全部的 $V\alpha_{ik}$ 量組成一个張量，称为导体的极化率張量。这張量是对称的: $\alpha_{ik}=\alpha_{ki}$(这一論断的证明見 § 11)。相应地，能量(2.12)可以写成下列形式:

$$\mathscr{U}=-\frac{1}{2}V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k. \tag{2.14}$$

例 题

1. 試用系数 C_{ab} 表示由两个导体(所带的电荷为 $\pm e$)所組成的系統的互电容 C。

解. 两个导体的互电容定义为下列关系式中的系数:

$$e=C(\varphi_2-\varphi_1),$$

于是导体系統的能量用 C 表示为$\mathscr{U}=\frac{e^2}{2C}$。和(2.9)式比較，我們得到

$$\frac{1}{C}=C_{11}^{-1}-2C_{12}^{-1}+C_{22}^{-1}=\frac{C_{11}+2C_{12}+C_{22}}{C_{11}C_{22}-C_{12}^2}.$$

2. 設点电荷 e 位于接地导体系統附近的 O 点处，并在这些导体上感生出电荷 e_a。如果电荷 e 不存在，而其中一个导体(第 a 个)的电势为 φ_a'(其余导体仍接地)，則在 O 点处的場势为 φ_0'。試用 φ_a' 和 φ_0' 表示电荷 e_a。

解. 如果导体上的电荷 e_a 使导体的电势为 φ_a, 而电荷 e'_a 使导体的电势为 φ'_a, 则从(2.3)式可知:

$$\sum_a \varphi_a e'_a = \sum_{a,b} \varphi_a C_{ab} \varphi'_b = \sum_a \varphi'_a e_a.$$

我們把这一关系式应用到由全部导体和一点电荷 e (把后者看作小綫度导体的极限情况) 所构成的系統的两种状态。在一种状态中有电荷 e, 导体上的电荷为 e_a, 电势为 $\varphi_a=0$。在另一种状态中, 电荷 $e=0$, 但有一个导体的电势为 $\varphi'_a\neq0$。于是得到 $e\varphi'_0+e_a\varphi'_a=0$, 由此得

$$e_a=-e\frac{\varphi'_0}{\varphi'_a}.$$

例如, 若电荷 e 至半徑为 a 的接地导体球的中心的距离为 $r\,(r>a)$, 则 $\varphi'_0=$ $=\varphi'_a\dfrac{a}{r}$, 而在球上感生的电荷为

$$e_a=-\frac{ea}{r}.$$

試举另一例子, 我們来研究两个接地的半徑分别为 a 和 b 的同心球間的电荷 e (电荷在离球心 r 处, 而且 $a<r<b$)。若外面的球接地, 而內面的球充电到电势为 φ_a, 则在距离 r 处的电势等于

$$\varphi'_0=\varphi'_a\frac{\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}},$$

因此, 电荷 e 在內面球上所感生的电荷等于

$$e_a=-e\frac{a(b-r)}{r(b-a)},$$

同理, 在外面球上感生的电荷为

$$e_b=-e\frac{b(r-a)}{r(b-a)}.$$

3. 設有电容分别为 C_1 和 C_2 的两个导体, 相隔的距离为 r, 而 r 大于导体本身的綫度。試求系数 C_{ab}。

解. 若导体 1 带的电荷为 e_1, 导体 2 不带电, 则在第一近似下, $\varphi_1=\dfrac{e_1}{C}$, $\varphi_2=\dfrac{e_1}{r}$; 这里我們略去了导体 2 上的电場变化和它的极化强度。于是 $C^{-1}_{11}=$

$=\frac{1}{C_1}$, $C_{12}^{-1}=\frac{1}{r}$, 同理, $C_{22}^{-1}\doteq\frac{1}{C_2}$。由此求得系数 C_{ab} 为①

$$C_{11}=C_1\left(1+\frac{C_1C_2}{r^2}\right),\quad C_{12}=-\frac{C_1C_2}{r},$$

$$C_{22}=C_2\left(1+\frac{C_1C_2}{r^2}\right).$$

4. 試求圓截面的細导綫做成的圓环的电容 C（环半徑为 b，导綫截面的半徑为 a, 而 $b\gg a$）。

解. 由于圆环很細, 在它表面附近的电場和由相同电荷分布于圆环軸綫上所产生的电場相等(这对于直圓柱体是精确的)。因此圆环的电势为

$$\varphi_a=\frac{e}{2\pi b}\oint\frac{dl}{r},$$

式中, r 是环面上一点至其軸綫元 dl 的距离, 并对这軸綫进行积分。我們把积分分成两个区域: $r<\Delta$ 和 $r>\Delta$, 其中 Δ 是这样一个距离, 即 $a\ll\Delta\ll b$。于是在 $r<\Delta$ 时, 可以假設圆环的一段是直綫, 因而

$$\int\limits_{\Delta>r}\frac{dl}{r}=\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\frac{dl}{\sqrt{l^2+a^2}}\cong 2\ \ln\frac{2\Delta}{a}.$$

在区域 $r>\Delta$ 內, 可以略去导綫的粗度不計, 也即是假設 r 簡单地是圆环軸綫上两点間的距离。于是

$$\int\limits_{r>\Delta}\frac{dl}{r}=2\int\limits_{\varphi_0}^{\pi}\frac{b\,d\varphi}{2b\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}=-2\ \ln\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{4},$$

式中 φ 是弦 r 所張的中心角, 而积分下限由 $2b\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)=\Delta$ 得出, 于是由此得到 $\varphi_0\simeq\frac{\Delta}{b}$。将积分的两部分相加起来, 量 Δ 就消去了, 最后得到圆环的电容 $C=\frac{e}{\varphi_a}$ 的式子为

$$C=\frac{\pi b}{\ln\left(\frac{8b}{a}\right)}.$$

---

① 展开式以下各項, 在普遍情况下, 比上面写出的項高一冪次以上(对 $\frac{1}{r}$ 而言)。但是, 若把 r 看成是两导体的"电荷中心"間的距离(对球为几何中心間的距离), 則以下各項的冪次将高 2 以上。

§ 3. 静电学問題的解法

在任何表面的給定边界条件下，求解拉普拉斯方程的普遍方法，已在数学物理的有关章节中进行研究；詳細叙述这些方法不屬于我們的目的。在本节中，我們只限于指出一些比較簡单的方法和求解一些有独立意义的典型問題①。

1. 鏡像法 設有一半空間充滿导电媒质，則推定这媒质以外的点电荷 e 所产生的电場，是应用所謂鏡像法的最簡单例子。这方法的原理是在选擇一些附加的虛点电荷，它們和給定的实电荷一起产生电場，使給定导体的表面和电場的一个等势面相合。在現在的情况下，要作到这点，可假想点 e 被导电媒质的边界平面所反射成一个像点，就在这像点处放上虛电荷 $e'=-e$。电荷 e 和它的"鏡像"e' 所产生的場势为

$$\varphi=e\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right), \tag{3.1}$$

式中，r 和 r' 分别为观測点至点电荷 e 和 e' 的距离。在边界平面上，$r=r'$，因而电势具有恒定值 $\varphi=0$，于是必要的边界条件实际上已被滿足，而由(3.1)式就可給出所提問題的解。应該注意，电荷 e 被吸向导体的力为 $\frac{e^2}{(2a)^2}$（鏡像力），而相互作用能等于 $-\frac{e^2}{4a}$。

点电荷 e 所感生的面电荷在边界平面上的分布，由下式得出：

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{r=r'}=-\frac{e}{2\pi}\frac{a}{r^3}, \tag{3.2}$$

式中，a 是电荷至平面的距离。容易证明，在边界平面上的总电荷等于

① 許多比較复杂問題的解法，參閱W. R. Smythe："靜电学和动电学"，(1954)；Г. А. Гринберг："电磁現象的数学理論問題选集"，(1948)。

$$\int \sigma df = -e,$$

这正是应得到的結果。

旁电荷在原来不带电的被絕緣导体上所感生的总电荷，不言而喻，仍然等于零。因此，在現在的情况下，如果导电媒质(实际上是大的导体)是被絕緣的，則必須假設，除电荷 $-e$ 外，还感生出电荷 $+e$，但由于后者分布于很大导体的表面上，因而这电荷的密度为零。

其次，我們来研究一个更为复杂的問題，即球形导体附近的点电荷 e 所产生的电場。要解决这个問題，可利用下面的容易用直接計算证明的結果。两点电荷 e 和 $-e'$ 所产生的場勢

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r'}$$

在半徑为 R 的球面上变为零，这球面的球心在联接 e 和 e' 的延长綫上，球心至这些点电荷的距离为 l 和 l'，而且 l, l', R 滿足下列等式：

$$\frac{l}{l'} = \left(\frac{e}{e'}\right)^2;\ R^2 = ll'.$$

首先假設，球形导体保持等勢状态 $\varphi = 0$(球接地)。于是距离球心为 l 的点电荷 e (在图 1 中的 A 点处) 在球外所产生的电場，将和两个点电荷——实电荷 e 和放在球內 (A' 点) 距离球心为 l' 的虛电荷 $-e'$——所組成的系統所产生的电場相同，而且

$$l' = \frac{R^2}{l},\ e' = e\frac{R}{l}. \tag{3.3}$$

这电場的电勢为

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{eR}{lr'} \tag{3.4}$$

(r 和 r' 如图 1 所示)。这时在球面上感生出不为零的总电荷，等

于 $-e'$。电荷和球形导体的相互作用能等于

$$\mathscr{U}=-\frac{ee'}{2(l-l')}=-\frac{e^2R}{2(l^2-R^2)}, \tag{3.5}$$

电荷被吸向球的力为

$$F=-\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial l}=-\frac{e^2lR}{(l^2-R^2)^2}.$$

如果球形导体所保持的总电荷等于零(球被絕緣，幷不带电)，则必須再引进一个虛电荷，使球面上所感生的总电荷等于零，而且不能破坏球面上电势不变的条件。这把电荷 $+e'$ 放在球心上就可以做到。

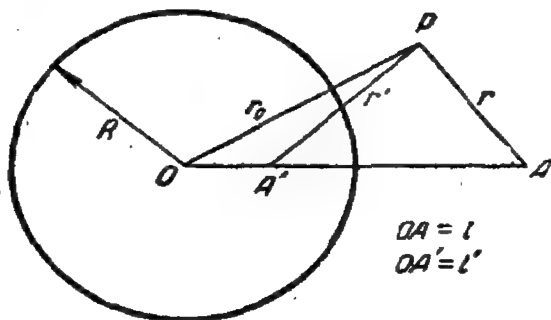


图 1

这样一来，所求的电場势由下式得出:

$$\varphi=\frac{e}{r}-\frac{e'}{r'}+\frac{e'}{r_0}. \tag{3.6}$$

在这种情况下的相互作用能是

$$\mathscr{U}=\frac{ee'}{2}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l-l'}\right)=-\frac{e^2R^3}{2l^2(l^2-R^2)}. \tag{3.7}$$

最后，若电荷 e 在导电媒质內的球形空腔內(图 1 的 A' 点处)，則空腔內的电場将和电荷 e 及其在球外 A 点处的“鏡像”所产生的电場相等(和导体接地或被絕緣无关):

$$\varphi=\frac{e}{r'}-\frac{eR}{l'r}. \tag{3.8}$$

2. 反演法 有一种簡单的方法，使我們在許多情况下可以根据一个靜电学問題的已知解答，求出另一个問題的解答。这方法的基础是拉普拉斯方程对一定的变数变换为不变式。

在球面坐标系內，拉普拉斯方程的形式为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_\Omega\varphi=0,$$

式中 Δ_Ω 表示拉普拉斯算符的角部分。容易证明，如果按照下式

$$r=\frac{R^2}{r'} \tag{3.9}$$

用新变数 r' 代换原来的变数 r(称为反演变换)，同时用

$$\varphi=\frac{r'}{R}\varphi' \tag{3.10}$$

代换未知的函数 φ(式中 R 为常数，其量綱与长度的相同，即反演半徑)，則上述拉普拉斯方程的形式仍然不变。因此，若函数 $\varphi(\mathbf{r})$ 满足拉普拉斯方程，則函数

$$\varphi'(\mathbf{r}')=\frac{R}{r'}\varphi\left(\frac{R'}{r'^2}\mathbf{r}'\right) \tag{3.11}$$

也是拉普拉斯方程的一个解。

假設我們已知由具有同一电势 φ_0 的导体系統与一点电荷系統所产生的静电場問題的解。場势 $\varphi(\mathbf{r})$ 通常規定为在无穷远处变为零。但是我們現在定义 $\varphi(\mathbf{r})$ 在无穷远处趋近于 $-\varphi_0$；于是在导体上，$\varphi=0$。

現在我們闡明，怎样的静电学問題可以利用变换后的函数(3.11)来解出。首先，改变全部导体的形状及其相互位置。于是导体表面上电势不变的边界条件自动得到滿足，因为 $\varphi=0$ 时，φ' 也将等于零。其次，改变全部点电荷的位置及其数值。于是在 $\mathbf{r}_0$ 点处的电荷移到 $\mathbf{r}_0'=\left(\frac{R^2}{r_0^2}\right)\mathbf{r}_0$ 的点处，并得到电荷 e'，这电量可用下列方式求出。当 $\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0$ 时，电势 $\varphi(\mathbf{r})$ 按照定律 $\varphi=\frac{e}{|\delta\mathbf{r}|}$ 变成无穷大，其中 $\delta\mathbf{r}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$。另一方面，求关系式 $\mathbf{r}=\left(\frac{R^2}{r'^2}\right)\mathbf{r}'$ 的微分，我們发現，微小差值 $\delta\mathbf{r}$ 与 $\delta\mathbf{r}'=\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0'$ 的絕对值之間存在下列关系:

$$(\delta\mathbf{r})^2=\frac{R^4}{r_0'^4}(\delta\mathbf{r}')^2.$$

因此，当 $\mathbf{r}'\to\mathbf{r}_0'$ 时，函数 φ' 按定律

$$\varphi'=\frac{R}{r_0'}\frac{e}{|\delta\mathbf{r}|}=\frac{er_0'}{R|\delta\mathbf{r}'|}$$

趋近于无穷大，相应的电荷为

$$e'=\frac{er_0'}{R}=\frac{eR}{r_0}. \tag{3.12}$$

最后研究函数 $\varphi'(\mathbf{r}')$ 在坐标原点附近的行为。 $\mathbf{r}'=0$ 的点相应于 $\mathbf{r}\to\infty$。但是当 $\mathbf{r}\to\infty$ 时，函数 $\varphi(\mathbf{r})$ 趋近于 $-\varphi_0$。因此，当 $\mathbf{r}'\to 0$ 时，函数 φ' 按照定律:

$$\varphi'=\frac{R\varphi_0}{r'}$$

变成无穷大，这表明在 $\mathbf{r}'=0$ 的点处有电荷 $e_0=-R\varphi_0$。

为供参考起見，我們在这里指出：某些几何图形在反演变换时的变换方式。半徑为 a 而球心在 $\mathbf{r}_0$ 点处的球面方程为

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2=a^2$$

进行反演变换后，就得到方程:

$$\left(\frac{R^2}{r'^2}\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0\right)^2=a^2,$$

这方程乘上 r'^2 和并項后变成下列形式:

$$(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0')^2=a'^2,$$

式中

$$\mathbf{r}_0'=-\frac{R^2\mathbf{r}_0}{a^2-r_0^2},\quad a'=\frac{aR^2}{|a^2-r_0^2|}. \tag{3.13}$$

由此可見，我們重新得到半徑为 a' 而球心在 $\mathbf{r}_0'$ 点处的另一球面。如果原来的球通过坐标原点($a=r_0$)，则 $a'=\infty$；在这种情况下，球面变成垂直于 $\mathbf{r}_0$ 方向的平面，并距离坐标原点为

$$r_0'-a'=\frac{R^2}{a+r_0}=\frac{R'}{2a}.$$

3. 保角映象法 只和两个笛卡儿坐标 (x、y) 有关的場称为平面場。解平面静电学問題的有力工具是复变数函数理論。应用这一理論的根据如下。

眞空內的静电場滿足两个方程：$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=0$ 和 $\mathrm{div}\,\mathbf{E}=0$。由第一个方程，我們可以按照 $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi$ 引进場势。第二个方程指明，除了 φ 外，我們也可以按照 $\mathbf{E}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$，引进电場的"矢量势"$\mathbf{A}$。在平面場的情况下，矢量 $\mathbf{E}$ 在 xy 平面內，并且只和这两个坐标有关。相应地，可以这样选择矢量 $\mathbf{A}$，使它处处与 xy 平面垂直。于是电場强度分量可表示成 φ 或 $\mathbf{A}$ 的导数形式:

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial A}{\partial y},\quad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{3.14}$$

但是函数 φ 和 A 的导数之間的这种关系式，从純数学的观点看来，和熟知的柯青-黎曼条件相同，这些条件表示的事实是复数表达式:

$$w=\varphi-iA \tag{3.15}$$

是复数宗量 $z=x+iy$ 的解析函数。这表明，函数 $w(z)$ 在每一点处有一定导数，与取导数的方向无关。例如，在 x 軸方向求微分，我們得到

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial A}{\partial x},$$

或者

$$\frac{dw}{dz}=-E_x+iE_y, \tag{3.16}$$

函数 w 就称为复数势。

电力綫由下列方程

$$\frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}$$

求出。把 E_x 和 E_y 表示成 A 的导数形式，于是可以把这个方程改写为

$$dx\frac{\partial A}{\partial x}+dy\frac{\partial A}{\partial y}=dA=0,$$

由此得出，$A(x, y)=$ 常数。由此可見，函数 $w(z)$ 的虛数部分的等值綫代表电力綫。这函数的实数部分的等值綫就是等势綫。这两族綫互相正交，已由初始关系式(3.14)保证，按照这些关系式，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y}=0.$$

无論解析函数 $w(z)$ 的实数部分或虛数部分，都在同样程度上滿足拉普拉斯方程。因此，可以同样地取 $\mathrm{Im}\, w$ 作为場势。相应地，这时力綫由方程 $\mathrm{Re}\, w=$ 常数給出。在这种情况下，代替(3.15)式，我們得到

$$w=A+i\varphi.$$

通过某一段等势綫的电場强度通量由积分

$$\int E_n dl=-\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}dl$$

給出，式中 dl 为等势綫元，而 $\mathbf{n}$ 是它的法綫方向。根据关系式(3.14)，我們有 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\frac{\partial A}{\partial l}$，同时正負号的选擇表明，如果从 $\mathbf{n}$ 方向看去，則 $\mathbf{l}$ 的正方向指向左方。因此，

$$\int E_n dl=\int\frac{\partial A}{\partial l}dl=A_2-A_1,$$

式中 A_1 和 A_2 是等势綫段两端的 A 值。特别是通过閉合迴路的电場通量等于 $4\pi e$，其中 e 是这迴路所包圍的总电荷(属于沿 z 軸方向的导体单位长度)。因此，

$$e=\frac{1}{4\pi}\Delta A, \tag{3.17}$$

式中 ΔA 是 A 沿反时針方向繞閉合等势綫一圈的变化。

复数势的最簡单例子，是带电的直导綫（和 z 軸相合）的場势。这場的强度由公式

$$E_r=\frac{2e}{r},\quad E_\theta=0$$

給出，式中 r,θ 是 xy 平面內的极坐标，而 e 是导綫单位长度上的电荷。相应的复数势为

$$w=-2e\ln z=-2e\ln r-2ie\theta. \tag{3.18}$$

若带电导綫不通过坐标原点，而通过 (x_0, y_0) 点，則复数势为

$$w=-2e\ln(z-z_0), \tag{3.19}$$

式中　$z_0=x_0+iy_0$。

从数学观点看来，函数关系 $w=w(z)$ 組成了复变数 z 的平面在复变数 w 的平面上的保角映象。假定 C 是导体在 xy 平面內的截面迴路，而 φ_0 为这导体的电势。从上面的討論可知，求出这导体所产生的电場問題，归結为求出一个函数 $w(z)$，它把 z 平面內的迴路 C 映象到 w 平面內平行于纵坐标軸的 $w=\varphi_0$ 的綫上。于是由实数部分 $\mathrm{Re}\,w$ 就可得出所研究的电場势（若函数 $w(z)$ 将迴路 C 映象到平行于横坐标軸的綫上，則电势由函数 $\mathrm{Im}\,w$ 得出）。

4. 劈形問題　为了供参考起見，我們在这里写出决定两相交半平面导体間的空間內的点电荷 e 所产生的电場公式。設柱面坐标系 r,θ,z 的 z 軸和交角的棱相合，而 θ 角从交角的一側算起；并假設电荷 e 在 $(a,\gamma,0)$ 点处（图 2），則两平面間的張开角 α 可以 $<\pi$，也可以 $>\pi$，在后一种情况下，电荷位于劈形导体以外。

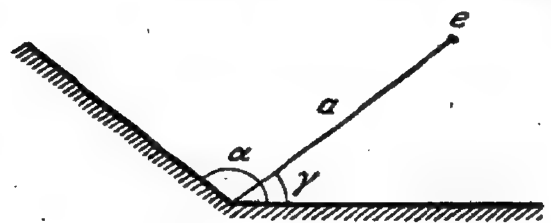


图　2

电場势由下列公式得出：①

① 这公式最先由 Г. 馬克多納尔特(1895)导出，它的推导見 13 頁上提到的 Г. Гринберг 的书。

$$\varphi=\frac{e}{\alpha\sqrt{2ar}}\int_{\eta}^{\infty}\left\{\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\zeta}{\alpha}}{\operatorname{ch}\frac{\pi\zeta}{\alpha}-\cos\frac{\pi(\theta-\gamma)}{\alpha}}-\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\zeta}{\alpha}}{\operatorname{ch}\frac{\pi\zeta}{\alpha}-\cos\frac{\pi(\theta+\gamma)}{\alpha}}\right\}\times$$

$$\times\frac{d\zeta}{\sqrt{\operatorname{ch}\zeta-\operatorname{ch}\eta}},\qquad(3.20)$$

$$\operatorname{ch}\eta=\frac{a^2+r^2+z^2}{2ar},\quad \eta>0$$

(在导体表面上，即当 $\theta=0$ 或 α 时，电势 $\varphi=0$)。

特别是当 $\alpha=2\pi$ 时，我們就得到点电荷电場內的半平面导体。在这种情况下，积分(3.20)可以在有限形式下算出为

$$\varphi|=\frac{e}{\pi}\left\{\frac{1}{R}\arccos\left(-\frac{\cos\frac{\theta-\gamma}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\eta}{2}}\right)-\frac{1}{R'}\arccos\left(-\frac{\cos\frac{\theta+\gamma}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\eta}{2}}\right)\right\},$$

$$(3.21)$$

$$R=\sqrt{a^2+r^2+z^2-2ar\cos(\gamma-\theta)},$$
$$R'=\sqrt{a^2+r^2+z^2-2ar\cos(\gamma+\theta)}.$$

在极限情况下，当电場的观测点趋近于电荷 e 所在的点时，则电势(3.21)取下列形式：

$$\varphi=\frac{e}{R}+\varphi',\ \varphi'=-\frac{e}{2\pi a}\left[1+\frac{\pi-\gamma}{\sin\gamma}\right],\qquad(3.22)$$

第一項是純粹的庫倫势，当 $R\to0$ 时变为无穷大，而 φ' 是在电荷 e 所在的点处由导体所引起的电势变化。于是电荷和半平面导体的相互作用能为

$$\mathscr{U}=\frac{e\varphi'}{2}=-\frac{e^2}{4\pi a}\left[1+\frac{\pi-\gamma}{\sin\gamma}\right].\qquad(3.23)$$

例 題

試求均匀外电場 $\mathfrak{E}$ 內未带电球形导体(半徑 R)周圍的电場。

解. 把电势写为 $\varphi=\varphi_0+\varphi_1$，式中 $\varphi_0=-\mathfrak{E}\mathbf{r}$ 是外电場的电势，而 φ_1 是球形导体所引起的电势变化。由于球是对称的，函数 φ_1 只与一恒定矢量 $\mathfrak{E}$ 有关。于是拉普拉斯方程在这种情况下在无穷远处变为零的唯一解为

$$\varphi_1=-常数\cdot\mathfrak{E}\nabla\frac{1}{r}=常数\cdot\frac{\mathfrak{E}\mathbf{r}}{r^3}$$

(坐标原点取在球心上)。在球表面上，φ 应为常数；由此得到式中的常数 $=R^3$，于是

$$\varphi=-\mathfrak{E}\mathbf{r}\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)=-\mathfrak{E}r\cos\theta\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)$$

(θ 是 $\mathfrak{E}$ 和 $\mathbf{r}$ 間的夹角)。电荷在球表面上的分布由下式給出：

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R}=\frac{3\mathfrak{E}}{4\pi}\cos\theta;$$

总电荷 $e=0$。

将 φ_1 与电偶极子的場势 $\frac{\mathscr{P}\mathbf{r}}{r^3}$ 比較，就可极其簡単地求得球的偶极矩；我們得到

$$\mathscr{P}=R^3\mathfrak{E}.$$

2. 与上題相同，試求在均匀的横向电場內的无限长圓柱体周圍的电場。

解. 我們采用垂直于柱体軸的平面內的极坐标。于是只与一个恒定矢量有关的拉普拉斯二維方程的解为

$$\varphi_1=常数\cdot\mathfrak{E}\nabla\ln r=常数\cdot\frac{\mathfrak{E}\mathbf{r}}{r^2},$$

与 $\varphi_0=-\mathbf{r}\mathfrak{E}$ 相加，并令式中的常数 $=R^2$，我們得到

$$\varphi=-\mathfrak{E}r\cos\theta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right).$$

面电荷密度为

$$\sigma=\frac{\mathfrak{E}}{2\pi}\cos\theta.$$

将 φ 与二維偶极場的电势比較，就可求得圓柱体单位长度的偶极矩 $\mathscr{P}$，即

$$2\mathscr{P}\nabla\ln r=\frac{2\mathscr{P}\mathbf{r}}{r^2},$$

因而 $\mathscr{P}=\mathfrak{E}\frac{R^2}{2}$。

3. 試求导体上劈形緣附近的电場。

解. 我們选用垂直于劈形緣的平面內的极坐标 r, θ, 原点在劈形角 θ_0 的頂点上。設 θ 角从劈形的一側算起; 导体外的区域相应于 θ 的値为 $0 \leqslant \theta \leqslant$ $\leqslant 2\pi-\theta_0$。在角緣附近的电势可以展开为 r 的冪級数, 但我們感兴趣的只是展开式內包含 r 的最低冪的第一項（常数后面的項）。二維拉普拉斯方程的与 r^n 成比例的解是 $r^n \cos n\theta$ 与 $r^n \sin n\theta$。于是当 $\theta=0$ 或 $\theta=2\pi-\theta_0$ 时（在导体表面上）, n 最小而且滿足条件 $\varphi=$ 常数的解是

$$\varphi = 常数 \cdot r^n \sin n\theta, \quad n=\frac{\pi}{2\pi-\theta_0}$$

（常数値只可由求整个場的問題的解得出）。于是电場强度按照 r^{n-1} 隨 r 而变化。因此, 当 $\theta_0<\pi (n<1)$ 时, 电場强度在角緣附近变为无穷大。特別是对于很尖的劈形 ($\theta \ll 1, n \cong \frac{1}{2}$), E 按照 $r^{-\frac{1}{2}}$ 隨 r 的减小而增加。在导体表面上的凹劈形緣附近 ($\theta_0>\pi, n>1$), 电場趋向于零。

4. 試求导体表面上的細錐形尖端附近的电場。

解. 我們选用球面坐标, 原点在圓錐形尖的頂点上, 极軸为圓錐尖的軸。設圓錐体的張开角为 $2\theta_0 \ll 1$, 于是导体外的区域相应于极角 θ 的値为 $\theta_0 \leqslant$ $\leqslant \theta \leqslant \pi$。現在求出場势变化部分对于圓錐軸为对称的解的形式为

$$\varphi = r^n f(\theta), \tag{1}$$

其中 n 为最小值。将上式代入拉普拉斯方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=0$$

以后, 得出

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\frac{df}{d\theta}\right)+n(n+1)f=0. \tag{2}$$

圓錐尖面上电势不变的条件表明, 必須 $f(\theta_0)=0$。

我們来求 θ_0 小时的解, 假設 $n \ll 1$, 而 $f(\theta)$ 的形式为 $f=$ 常数 $\cdot[1+$ $+\psi(\theta)]$, 式中 $\psi \ll 1$ (当 $\theta_0 \to 0$, 即对无穷細的尖, 自然可以預料到, 差不多在圓錐尖周圍的全部区域內, φ 趋近于常数)。于是得到 ψ 的方程为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\psi}{d\theta}\right)=-n, \tag{3}$$

在圓錐尖外的区域內(特別当 $\theta=\pi$ 时), ψ 无奇点的解为

$$\psi(\theta)=2n\ln\sin\frac{\theta}{2}.$$

当 $\theta\sim\theta_0\ll1$ 时，函数 ψ 不再是小值。虽然如此，但我們所得到的式子仍然可以应用，因为在这区域内，由于 θ 很小，一般可以略去方程(2)内的第二項。但为了求出第一近似下的常数 n，必須使上面求得的函数 $f=1+\psi$ 在 $\theta=\theta_0$ 时变为零。于是求得①

$$n=-\frac{1}{2\ln\theta_0}.$$

在趋近于圓錐尖端时，电場强度随 $r^{-(1-n)}$，也即是基本上随 $\frac{1}{r}$ 而无限地增大。

5. 与上题相同，試求导体面上細圓錐形孔附近的电場。

解. 現在导体外的区域相应于 θ 的値为 $0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$。和前一問題一样，把 φ 写成(1)的形式，但是在本題中 $n\gg1$。因为在場的整个区域內，現在是 $\theta\ll1$，于是方程(2)可以写成下面的形式：

$$\frac{1}{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\theta\frac{df}{d\theta}\right)+n^2f=0.$$

这就是貝塞耳方程，它在电場区域內无奇点的解为 $J_0(n\theta)$。n 的値定义为方程 $J_0(n\theta_0)=0$ 的最小根，由此得到

$$n=\frac{2.4}{\theta_0}.$$

6. 試求电偶极子被吸引向导体平面的能量。

解. 选擇 x 軸垂直于导体表面，并通过偶极子所在的点；設偶极矩矢量 $\mathscr{P}$ 在 xy 平面內。偶极子的"像"在 $-x$ 点处，并且其偶极矩为

$$\mathscr{P}'_x=\mathscr{P}_x,\quad \mathscr{P}'_y=-\mathscr{P}_y,$$

于是我們求得电偶极子的吸引能量为偶极子与其"鏡像"的相互作用能，并等于

$$\mathscr{U}=-\frac{2\mathscr{P}_x^2+\mathscr{P}_y^2}{8x^3}.$$

7. 試求两个平行的无限长圓柱形导体单位长度上的互电容（柱体的半徑

---

① 更精确的公式 $n=\frac{1}{2\ln\left(\frac{2}{\theta_0}\right)}$ 包含大自然对数的系数，实际上不能用上面所指出的簡单方法得到。但由更精确的計算，由于一些偶然的原因，正好也得到这公式。

分别为 a 和 b, 軸間的距离为 c)①。

解。两圆柱体所产生的电場，和通过适当选擇的 A 点和 A' 点(图 3)的两条带电导綫所产生的場(在柱体外的空間內)相同。导綫单位长度上的电荷为 $\pm e'$, 等于柱体上的电荷，而 A 点和 A' 点必須在 OO' 綫上，以使柱体面与等勢面相合。为此，距离 OA 和 $O'A'$ 必須滿足下列关系式:

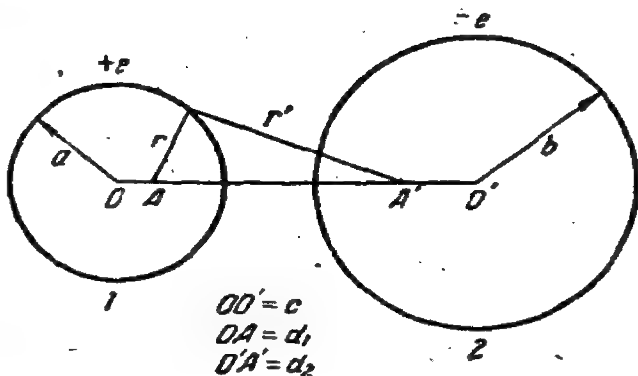


图 3

$$OA \cdot OA' = a^2, \quad O'A' \cdot O'A = b^2,$$

即

$$d_1(c-d_2) = a^2, \quad d_2(c-d_1) = b^2.$$

于是在每一圓周上，离 A 点和 A' 点的距离之比 $\frac{r'}{r}$ 为常数; 在圓周 1 上，

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{OA'} = \frac{a}{c-d_2} = \frac{d_1}{a},$$

而在圓周 2 上，$\frac{r'}{r} = \frac{d_2}{b}$。相应地，圓柱导体的电勢为

$$\varphi_1 = -2e\ln\frac{r}{r'} = -2e\ln\frac{d_1}{a}, \quad \varphi_2 = 2e\ln\frac{d_2}{b},$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2e\ln\frac{d_1 d_2}{ab}.$$

由此求得互电容 $C = \frac{e}{\varphi_2 - \varphi_1}$ 为

$$\frac{1}{C} = 2\ln\frac{d_1 d_2}{ab} = 2\operatorname{Arch}\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}.$$

特別是对离开导体面的距离为 $h(h>a)$ 而半徑为 a 的圓柱体来說，必須令 $c = b + h$, 并过渡到极限值 $b \to \infty$; 于是得到

$$\frac{1}{C} = 2\operatorname{Arch}\frac{h}{a}.$$

① 两球形导体的类似問題，不能在有限形式下解出，其差別在于: 在两条平行的带电的(电荷相等、符号相反)导綫的电場內，全部的等勢面为圓柱形的，而在两点电荷 $\pm e$ 的場內，等勢面不是球形的。

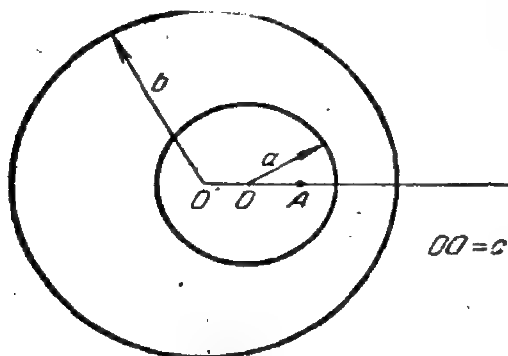


图 4

如果有两空心圆柱体，一个放在另一个的里面($c<b-a$)，那末导体外沒有电場，而在两个圆柱体間的空隙內的电势，和通过 A 点和 A' 点(图 4)并带有电荷 $+e$ 和 $-e$ 的两条导綫所产生的电場完全相同。用同样方法，我們得到下面的結果：

$$\frac{1}{C}=2\operatorname{Arch}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

8. 設导体的边界为一无限平面，它的突凸部分为半球形状。試求表面上的电荷分布。

解. 在例题 1 所求出的場內，場势的形式为

$$\varphi=\text{常数}\cdot z\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right),$$

$z=0$ 的平面(其突出部分为 $r=R$)为一等势面(在这等势面上，$\varphi=0$)。因此，它也可以是导体面，由上面的公式可求出导体外的場。在导体表面的平面部分的电荷分布由下式得出：

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\sigma_0\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)$$

(我們假定常数 $=-4\pi\sigma_0$，式中 σ_0 为距突凸部分很远处的电荷密度)，在突凸部分的表面上，

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R}=3\sigma_0\frac{z}{R}.$$

9. 試求电場 $\mathfrak{E}$ 內导电的細圓柱杆(长为 $2l$，半徑为 a，而 $a\ll l$)的电偶极矩，电場与杆的軸平行。

解. 設 $\tau(z)$ 为杆表面单位长度上所感生的电荷；z 为沿圓柱杆軸的坐标，并从圓柱杆軸的中点算起，在导体表面上电势不变的条件为

$$-\mathfrak{E}z+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\tau(z')dz'd\varphi}{R}=0,$$

$$R=\sqrt{(z'-z)^2+4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

φ 是通过圓柱杆的軸及其表面上相距为 R 的两点的平面間的夾角。分开积分

为两部分，并令 $\tau(z')=\tau(z)+[\tau(z')-\tau(z)]$。注意到 $l\gg a$，对离杆两端不十分近的点，我們有

$$\frac{\tau(z)}{2\pi}\iint\frac{dz'\,d\varphi}{R}\cong\frac{\tau(z)}{2\pi}\int_0^\pi\ln\frac{l^2-z^2}{a^2\sin\frac{\varphi}{2}}d\varphi=$$

$$=\tau(z)\ln\frac{4(l^2-z^2)}{a^2},$$

（此处利用了已知值 $\int_0^\pi\ln\sin\varphi d\varphi=-\pi\ln 2$）。在包含差值 $\tau(z')-\tau(z)$ 的积分內，可以略去 R 內含有 a^2 的項，因为这并不会引起积分的发散。于是

$$\mathfrak{E}z=\tau(z)\ln\frac{4(l^2-z^2)}{a^2}+\int_{-l}^{l}\frac{\tau(z')-\tau(z)}{|z'-z|}dz'.$$

τ 对 z 的依賴关系，基本上归結为 z 的比例关系；在这种近似下，上式的积分給出 $-2\tau(z)$，結果得到

$$\tau(z)=\frac{\mathfrak{E}z}{\ln\frac{4(l^2-z^2)}{a^2}-2}.$$

在杆的两端点附近，这式子不适用，但是对計算所求的偶极矩，这个 z 值的区域是不重要的。符合我們所要求的精确度，我們得到

$$\mathscr{P}=\int_{-l}^{l}\tau(z)z\,dz=\frac{\mathfrak{E}}{L}\int_0^l\left\{z^2-\frac{z^2}{2L}\ln\left(1-\frac{z^2}{l^2}\right)\right\}dz=$$

$$=\frac{\mathfrak{E}l^3}{3L}\left\{1+\frac{1}{L}\left(\frac{4}{3}-\ln 2\right)\right\}$$

（式中 $L=\ln\left(\frac{2l}{a}\right)-1$，是一个大数），或者（有同样的精确度）

$$\mathscr{P}=\frac{\mathfrak{E}l^3}{3\left(\ln\frac{4l}{a}-\frac{7}{3}\right)}.$$

10. 試求空心的球截形导体的电容。

解. 选擇坐标原点 O 在球截形边緣的某一点处（图 5），并进行反演变换：$r=\frac{l^2}{r'}$（l 为球截形主截面內的弦长）。这时球截形变成垂直于球截形的半徑 AO 的半平面（图 5 上的虛綫），这半平面也通过它边緣上的 B 点；角 $\gamma=\pi-\theta$，

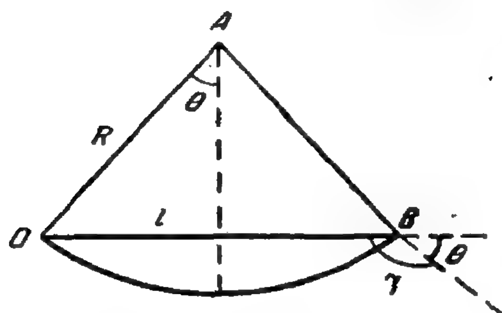


图　5

此处 2θ 为球截形所給的角度。

如果球截形上的电荷为 e，并取其电势为零，則 $r\to\infty$ 时，場势的形式变为

$$\varphi\cong-\varphi_0+\frac{e}{r}.$$

相应地，在变换后的問題內，当 $r'\to 0$ 时，場势的形式变为

$$\varphi'=\frac{l\varphi}{r'}\cong\frac{l\varphi_0}{r'}+\frac{e}{l}$$

（第一項相应于坐标原点处的电荷 $e'=-l\varphi_0$）。

另一方面，按照(3.23)式，我們有

$$\varphi'=\frac{e'}{r'}-\frac{e'}{2\pi l}\left(1+\frac{\theta}{\sin\theta}\right)$$

（这是离电势为零的半平面导体边緣为 l 处的电荷 e' 附近的电势）。比較两个式子，我們得到所求的电容 $C=\frac{e}{\varphi_0}$ 为

$$C=\frac{l}{2\pi}\left(1+\frac{\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{R}{\pi}(\sin\theta+\theta)$$

（R 为球截形的半徑）。

11. 边緣效应使平面电容器的电容 $C=\frac{S}{4\pi d}$（S 为电容器板的面积，d 为两板間的距离；$d\ll\sqrt{S}$）有所改正，試求这改正值。

解. 由于在电容器的两板上存在自由边緣，因而在电容器两板上电荷的均匀分布遭到破坏。为了求得在第一近似下的改正值，我們来研究电容器两板上离边緣的距离为 x 的各点；而 $d\ll x\ll\sqrt{S}$。例如，我們研究电容器上面的板（其电势为 $\varphi=-\frac{\varphi_0}{2}$，图 6，$a$），并略去它至中央平面（等势面 $\varphi=0$）的距离 $\frac{d}{2}$. 于是我們的問題就成为求平面中电势不同的两部分交界附近的电場。这問題的解法是很簡单的①，因而我們得到超过的电荷密度（与离边緣很远的 σ 比較）的表达式为

① 参閱 § 22，在电势公式(22.2)內，在現在的情况下，必須令 $\varphi_{ab}=\frac{\varphi_0}{2}$，$\alpha=\pi$.

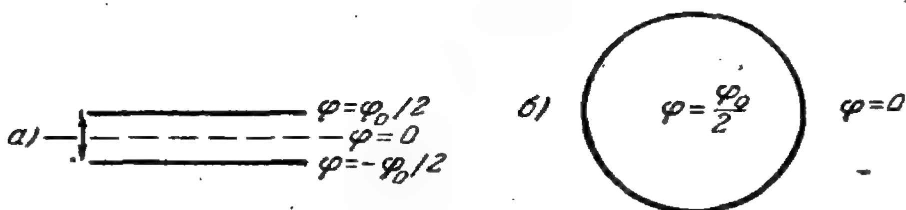


图 6

$$\Delta\sigma=\frac{E_n}{4\pi}=\frac{\varphi_0}{8\pi^2 x},$$

于是总超过电荷为

$$L\int\Delta\sigma\cdot dx=\frac{\varphi_0 L}{8\pi^2}\ln\frac{\sqrt{S}}{d}$$

(L 为电容器的一板的周长);在計算对数性发散积分时,我們取区域 $d\ll x\ll\ll\sqrt{S}$ 的边界作为积分的上限和下限。由此求得电容为①

$$C=\frac{S}{4\pi d}+\frac{L}{8\pi^2}\ln\frac{\sqrt{S}}{d}.$$

§ 4. 导电椭球

利用所謂椭球坐标,可以解决求带电椭球导体的电場問題和在均匀外場內的椭球問題。

椭球坐标和笛卡儿坐标的关系为

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1\quad(a>b>c).\tag{4.1}$$

这个方程是 u 的三次方程,有三个不同的实根($u=\xi,\eta,\zeta$)在下列区間內:

$$\xi\geqslant-c^2,\ -c^2\geqslant\eta\geqslant-b^2,\ -b^2\geqslant\zeta\geqslant-a^2.\tag{4.2}$$

这三个根也是点 (x, y, z) 的椭球坐标。它們的几何意义可从下列

① 更精确的計算(求出对数宗量內的系数),需要应用更复杂的方法,而且所得到的結果依賴于两板的形状。对于圓形板(半徑为 R),我們得到

$$C=\frac{R^2}{4d}+\frac{R}{4\pi}\left(\ln\frac{16\pi R}{d}-1\right)$$

(克希霍夫公式)

事实看出，ξ,η,ζ 为常数的面分别代表椭球面、单叶双曲面和双叶双曲面，而且它們和椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4.3}$$

具有同一焦点。

三族曲面中每一族有一个面通过空間的每一点，而且这三个面是相互正交的。由形式(4.1)的三个联立方程的解，即可得到从椭球坐标变换到笛卡儿坐标的变换公式为①

$$\begin{aligned} x&=\pm\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]^{\frac{1}{2}},\\ y&=\pm\left[\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}\right]^{\frac{1}{2}},\\ z&=\pm\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

椭球坐标系內的长度元为

$$dl^2=h_1^2d\xi^2+h_2^2d\eta^2+h_3^2d\zeta^2,$$

$$h_1=\frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}{2R_\xi},\quad h_2=\frac{\sqrt{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}}{2R_\eta},$$

$$h_3=\frac{\sqrt{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}}{2R_\zeta}, \tag{4.5}$$

这里引入了符号:

$$R_u=\sqrt{(u+a^2)(u+b^2)(u+c^2)},\quad u=\xi,\eta,\zeta.$$

相应地，椭球坐标系內的拉普拉斯方程为

$$\Delta\varphi=\frac{4}{(\xi-\eta)(\zeta-\xi)(\eta-\zeta)}\left[(\eta-\zeta)R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\right.$$

---

① 严格說来，椭球坐标不应取为 ξ,η,ζ 本身，而应取为$\sqrt{a^2+\xi}$，$\sqrt{b^2+\xi}$，$\sqrt{c^2+\xi}$。于是(4.4)式中的双号±消去，而两坐标系的关系成为单对应的，这正是应該的。

$$+(\zeta-\xi)R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)+$$

$$+(\xi-\eta)R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)\Bigg]=0. \tag{4.6}$$

如果半軸 a, b, c 中有两个变成相等，則橢球坐标系发生退化。設 $a=b>c$；于是(4.1)的三次方程退化为二次方程：

$$\frac{\rho^2}{a^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1,$$
$$\rho^2=x^2+y^2, \tag{4.7}$$

它有两个根，其值在下列范圍內：

$$\xi\geqslant-c^2,\quad -c^2\geqslant\eta\geqslant-a^2.$$

ξ 和 η 为常数的坐标面分别变成共焦点的扁迴轉橢球面和单叶迴轉双曲面（图 7）。我們可以引进 x, y 平面內的极角 φ 作为第三个坐标($x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$)。当 $a=b$ 时，橢球坐标 ζ 退化为常数 $-a^2$，它和 φ 角的关系是：当 b 趋近于 a 时，ζ 趋近于 $-a^2$；即 $b\to a$ 时，我們有

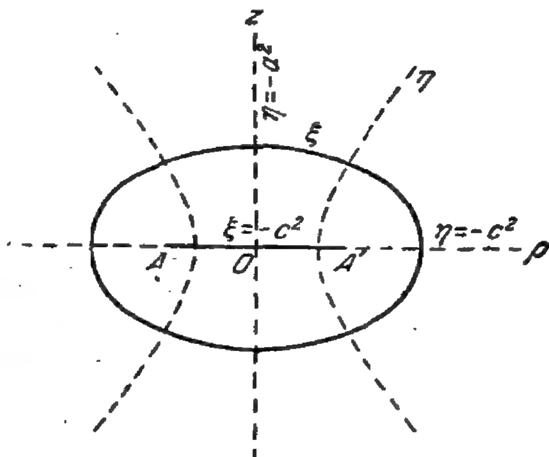


图 7

$$\cos\varphi=\sqrt{\frac{a^2+\zeta}{a^2-b^2}}, \tag{4.8}$$

从(4.4)式或者直接从(4.1)式，很容易看出这一点。坐标 z, ρ 和坐标 ξ, η 的关系，按照(4.4)式，由下式給出

$$z=\pm\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)}{c^2-a^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho=\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)}{a^2-c^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.9}$$

坐标 ξ, η, φ 称为扁椭球坐标①。

由类似方式，当 $a>b=c$ 时，椭球坐标退化为所謂长椭球坐标。坐标 ξ 和 ζ 为方程

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{\rho^2}{b^2+u}=1,\quad \rho^2=y^2+z^2, \tag{4.10}$$

的根，而且 $\xi \geqslant -b^2$, $-b^2 \geqslant \zeta \geqslant -a^2$。$\xi$ 和 ζ 为常数的面代表长椭球面和双叶迴轉双曲面(图 8)。当 $c \to b$ 时，坐标 η 按下列規律退化为常数 $-b^2$:

$$\cos\varphi=\sqrt{\frac{b^2+\eta}{b^2-c^2}}, \tag{4.11}$$

式中 φ 是 y, z 平面內的极角。

图 8

坐标 ξ, ζ 和坐标 x, ρ 的关系，由下列公式給出：

$$x=\pm\left[\frac{(\xi+a^2)(\zeta+a^2)}{a^2-b^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho=\left[\frac{(\xi+b^2)(\zeta+b^2)}{b^2-a^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.12}$$

在扁椭球坐标系內，坐标面(椭球面和双曲面)的焦点，位于 xy 平面內半徑为 $\sqrt{a^2-c^2}$ 的圓上(图 7 內的 AA' 是这圓的直徑)。現在我們通过某一点 P 和 z 軸作一平面。它与同焦点圓相交于两点；設 r_1 和 r_2 分别是这两点至 P 点的距离。如果 ρ, z 是 P 点的坐标，则

$$r_1^2=(\rho-\sqrt{a^2-c^2})^2+z^2,$$

$$r_2^2=(\rho+\sqrt{a^2-c^2})^2+z^2.$$

① 我們在这里采用的扁椭球坐标的定义是，它們直接是椭球坐标的极限情况，在文献中还采用其他定义，但很容易化到我們的定义。

扁椭球坐标 ξ,η 用 r_1, r_2 表示为

$$\xi=\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2-a^2, \tag{4.13}$$

$$\eta=\left(\frac{r_2-r_1}{2}\right)^2-a^2.$$

在长椭球坐标系內，其焦点为 x 軸上的两个点：$x=\pm\sqrt{a^2-b^2}$（图7的 A 和 A' 点）。如果 r_1, r_2 是这两个焦点至 P 点的距离，则

$$r_1^2=\rho^2+(z-\sqrt{a^2-b^2})^2,$$

$$r_2^2=\rho^2+(z+\sqrt{a^2-b^2})^2,$$

而扁椭球坐标 ξ,ζ 用 r_1 和 r_2 表示（即以 ζ 代替 η）的式子和(4.13)式相同。

現在回到带电椭球的电場問題，这椭球面由方程(4.3)表示。在椭球坐标內，这即是坐标面：$\xi=0$。因此，十分显然，如果求出的場势仅是 ξ 的函数，则全部 $\xi=$ 常数的椭球面（其中包括导体面），都自动地成为等势面。于是拉普拉斯方程(4.6)变成

$$\frac{d}{d\xi}\left(R_\xi\frac{d\varphi}{d\xi}\right)=0,$$

由此得

$$\varphi(\xi)=A\int_\xi^\infty\frac{d\xi}{R_\xi}.$$

式中积分的上限这样選擇，使无穷远处的場等于零。常数 A 可以非常簡单地从下列条件求出：在 r 很大时，电場必須趋近于庫侖場：$\varphi\cong\frac{e}{r}$，式中 e 为导体上的总电荷。$r\to\infty$ 相应于 $\xi\to\infty$；这时 $r^2\cong\xi$，正如从(4.1)式中令 $u=\xi$ 所得到的結果。另一方面，ξ 很大时，我們有 $R_\xi\approx\xi^{\frac{3}{2}}$ 和 $\varphi\cong\frac{2A}{\sqrt{\xi}}=\frac{2A}{r}$。由此得出，$2A=e$，于是最后得到

$$\varphi(\xi)=\frac{e}{2}\int_{\xi}^{\infty}\frac{d\xi}{R_{\xi}}, \tag{4.14}$$

这里的积分是第一种椭圆积分。导体面相应于 $\xi=0$, 因此得到椭球的电容为

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{d\xi}{R_{\xi}}. \tag{4.15}$$

椭球面上的电荷密度分布,由电势的法向导数得出:

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\xi=0}=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{h_1}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)_{\xi=0}=$$

$$=\frac{e}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{\eta\zeta}}.$$

由(4.4)式,容易证明,当 $\xi=0$ 时,

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{\eta\zeta}{a^2b^2c^2}.$$

因此

$$\sigma=\frac{e}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.16}$$

对双軸椭球而言,积分(4.14)—(4.15)可用基本函数来表示。对于长椭球($a>b=c$),場势由下式給出:

$$\varphi=\frac{e}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\xi+a^2}}, \tag{4.17}$$

而其电容为

$$C=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\operatorname{Arch}\frac{a}{b}}; \tag{4.18}$$

对于扁椭球($a=b>c$),我們有

$$\varphi=\frac{e}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+c^2}},$$

$$C=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\arccos\frac{c}{a}}. \tag{4.19}$$

特别是对圓盘来說($a=b, c=0$)

$$C=\frac{2a}{\pi}. \tag{4.20}$$

現在我們来研究均匀外电場 $\mathfrak{E}$ 內未带电橢球导体的問題。对普遍性沒有任何限制，只須研究橢球一个軸方向上的外电場 $\mathfrak{E}$ 就行了。相反地，可以把 $\mathfrak{E}$ 分解为沿橢球軸的三个分量，然后将各分量的場疊加起来，就可得到总电場。

x 軸方向(橢球的 a 軸)上的均匀电場 $\mathfrak{E}$ 的場势，在橢球坐标內的形式为

$$\varphi_0=-\mathfrak{E}x=-\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}}\sqrt{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}. \tag{4.21}$$

我們将橢球外的場势写成 $\varphi=\varphi_0+\varphi'$，式中 φ' 为由橢球所引起的外場畸变，并且我們求得 φ' 为

$$\varphi'=\varphi_0F(\xi). \tag{4.22}$$

在这函数內，依賴于 η 和 ζ 的因子和 φ_0 內的相同。这种函数形式滿足 $\xi=0$ 和 η, ζ 为任意值时的边界条件(在橢球面上)。把(4.22)式代入拉普拉斯方程(4.6)，我們得到 $F(\xi)$ 的方程为

$$\frac{d^2F}{d\xi^2}+\frac{dF}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\ln[R_\xi(\xi+a^2)]=0.$$

这个方程的一个解为 $F=$常数，而另一解为

$$F(\xi)=A\int_\xi^\infty\frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}. \tag{4.23}$$

积分的上限这样选擇，使在无穷远处($\xi\to\infty$)場势 φ' 趋近于零。这里的积分是第二种橢圓积分。

在椭球面上，必須 $\varphi=$ 常数。为了使这一条件在 $\xi=0$ 和 η, ζ 为任意值时得到满足，必須这一常数等于零。适当选擇 $F(\xi)$ 内的系数 A [例如使 $F(0)=-1$]，我們最后就得到椭球周圍的場势的表达式为

$$\varphi=\varphi_0\left\{1-\int_\xi^\infty\frac{ds}{(s+a^2)R_s}\bigg/\int_0^\infty\frac{ds}{(s+a^2)R_s}\right\}. \tag{4.24}$$

現在我們求离椭球很远 r 处的場势 φ'。大的 r 值相应于大的坐标值 ξ，而且 $r^2\cong\xi$，这从(4.1)式可以直接得出。因此，

$$\int_\xi^\infty\frac{ds}{(s+a^2)R_s}\cong\int_{r^2}^\infty\frac{ds}{s^{5/2}}=\frac{2}{3r^3},$$

我們得到場势 φ' 为

$$\varphi'=\frac{\mathfrak{E}x}{r^3}\frac{V}{4\pi n^{(x)}},$$

式中 $V=4\pi abc/3$ 为椭球的体积，而量 $n^{(x)}$（和下面出現的类似量 $n^{(y)}$, $n^{(z)}$）由下式定义：

$$n^{(x)}=\frac{abc}{2}\int_0^\infty\frac{ds}{(s+a^2)R_s},$$

$$n^{(y)}=\frac{abc}{2}\int_0^\infty\frac{ds}{(s+b^2)R_s},$$

$$n^{(z)}=\frac{abc}{2}\int_0^\infty\frac{ds}{(s+c^2)R_s}. \tag{4.25}$$

φ' 的表达式为电偶极 z 的場势：

$$\varphi'=\frac{x\mathscr{P}_x}{r^3},$$

这正是所預料的。而且椭球的偶极矩为

$$\mathscr{P}_x=\mathfrak{E}_x\frac{V}{4\pi n_x} \tag{4.26}$$

由类似的表达式，可以求出电場$\mathfrak{E}$在y軸或z軸方向时的偶极矩。

正常数$n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$只与椭球的形状有关，而与它的体积无关，称它們为退极化系数[①]。如果坐标軸和椭球軸相合，则(4.26)式必須写成張量形式：

$$\frac{4\pi}{V}n_{ik}\mathscr{D}_k=\mathfrak{E}_i. \tag{4.27}$$

量$n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$是二秩对称張量$n_{ik}$的主值。

在a, b, c为任意值的普遍情况下，从$n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$的定义，首先可以得到

如果 $a>b>c$，则 $n^{(x)}<n^{(y)}<n^{(z)}$. (4.28)

其次，将积分$n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$相加，并引进$u=R_s^2$为积分变数，我們得到

$$n^{(x)}+n^{(y)}+n^{(z)}=\frac{abc}{2}\int_{(abc)^2}^{\infty}\frac{du}{u^{3/2}},$$

由此得到

$$n^{(x)}+n^{(y)}+n^{(z)}=1. \tag{4.29}$$

三个退极化系数之和等于1(写成張量形式，这表明：$n_{ii}=1$)。另一方面，旣然这些系数是正的，因而其中任何一个的值都不能超过1。

对于球体($a=b=c$)，由对称性看出，$n^{(x)}=n^{(y)}=n^{(z)}$，因而

$$n^{(x)}=n^{(y)}=n^{(z)}=\frac{1}{3}. \tag{4.30}$$

对于圆柱体(其軸指向x軸，$a\to\infty$)，我們有[②]

$$n^{(x)}=0,\quad n^{(y)}=n^{(z)}=\frac{1}{2}. \tag{4.31}$$

---

① 在斯托涅的論文内对这些系数編成了一个有用的表(Phil. Mag, 36, 803, 1945)。

② 球和圆柱体的这些值，当然和§3内例題1和2所得到的結果符合一致。

对于一般迴轉橢球，(4.25)的橢圓积分可用基本函数来表示。对偏心率为 $e=\sqrt{1-b^2/a^2}$ 的长迴轉橢球($a>b=c$)，

$$n^{(x)}=\frac{1-e^2}{2e^3}\left(\ln\frac{1+e}{1-e}-2e\right),$$

$$n^{(y)}=n^{(z)}=\frac{1}{2}(1-n^{(x)}). \tag{4.32}$$

如果橢球接近球形($e\ll1$)，则近似地有

$$n^{(x)}=\frac{1}{3}-\frac{2}{15}e^2,$$

$$n^{(y)}=n^{(z)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}e^2. \tag{4.33}$$

对于扁橢球($a=b>c$)，

$$n^{(z)}=\frac{1+e^2}{e^3}(e-\operatorname{arctg}e),$$

$$n^{(x)}=n^{(y)}=\frac{1}{2}(1-n^{(z)}), \tag{4.34}$$

式中 $e=\sqrt{(a/c)^2-1}$。如果 $e\ll1$，则

$$n^{(z)}=\frac{1}{3}+\frac{2e^2}{15},$$

$$n^{(x)}=n^{(y)}=\frac{1}{3}-\frac{e^2}{15}. \tag{4.35}$$

例 题

1. 試求带电圓盘（半徑为 a)的电場用柱面坐标表示的式子；并求出圓盘上的电荷分布。

解. 在公式(4.16)内过渡到极限值 $c\to0$, $z\to0$，即得到电荷的分布，而比值 $z/c=\sqrt{1-r^2/a^2}$(式中 $r^2=x^2+y^2$)和(4.3)符合一致。由此得出

$$\sigma=\frac{e}{4\pi a^2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

整个空間內的場势由(4.19)式給出（其中令 $c=0$)，利用（4.1)式（其中令

$c=0, u=\xi, a=b$)，我們将 ξ 用 r 和 z 来表示，于是場势 φ 为

$$\varphi=\frac{e}{a}\operatorname{arctg}\left[\frac{2a^2}{r^2+z^2-a^2+\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

在圓盘边緣附近，代替 r 和 z，我們按照 $z=\rho\sin\theta$，$r=a-\rho\cos\theta(\rho\ll a)$（图 9），引进坐标 ρ 和 θ，于是我們得到

$$\varphi\cong\frac{e}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{2\rho}{a}}\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

这与 § 3内例題 3 的普遍結果符合一致。

图 9

2. 試求带电椭球的四极矩。

解. 带电导体的四极矩張量定义为 $D_{ik}=e\,(3\overline{x_ix_k}-\overline{r^2}\,\delta_{ik})$，式中 e 为它的总电荷，而横綫表示按下列定律

$$\overline{x_ix_k}=\frac{1}{e}\oint x_ix_k\sigma df$$

求得的平均值。十分显然，椭球軸同时是張量 D_{ik} 的主軸。对于 σ 利用(4.16)式，又对于椭球面元利用下列表达式：

$$df=\frac{dxdy}{\nu_z}=\frac{dxdy}{z/c^2}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}},$$

于是我們得到

$$\overline{z^2}=\frac{c}{4\pi ab}\int zdxdy=\frac{c^2}{3}$$

（对 $dxdy$ 的积分是对被 xy 平面所切割出的椭球截面积分两次）。因而

$$D_{xx}=\frac{e}{3}(2a^2-b^2-c^2),$$

$$D_{yy}=\frac{e}{3}(2b^2-a^2-c^2),$$

$$D_{zz}=\frac{e}{3}(2c^2-a^2-b^2).$$

3. 試求均匀的外电場内未带电椭球面上的电荷分布。

解. 按照(1.9)式，我們有

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\xi=0}=-\left(\frac{1}{4\pi h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}$$

（椭球表面法綫方向的长度元，按照(4.5)式为 $h_1d\xi$）。代入(4.24)式，并考虑到

$$\nu_x=\frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0}=\frac{x}{2a^2h_1}\bigg|_{\xi=0}$$

(ν为椭球表面法綫方向的单位矢量), 我們得到

$$\sigma=\frac{\mathfrak{E}}{4\pi n^{(x)}}\nu_x.$$

当外电場相对于椭球的 x, y, z 軸取任意方向时,

$$\sigma=\frac{1}{4\pi}\nu_i n_{ik^{-1}}\mathfrak{E}_k=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\nu_x}{n^{(x)}}\mathfrak{E}_x+\frac{\nu_y}{n^{(y)}}\mathfrak{E}_y+\frac{\nu_z}{n^{(z)}}\mathfrak{E}_z\right].$$

4. 与上題相同, 試求与場平行的圓盘平面(半徑为 a)上的电荷分布①, 并求圓盘的偶极矩。

解. 我們把圓盘看作短半軸 c 趋近于零的迴轉椭球的极限情况。这时, 由(4.34)式, 这軸上(z 軸)的退极化系数趋近于 1, 而在 x 軸和 y 軸上的退极化系数趋近于零:

$$n^{(z)}=1-\frac{\pi c}{2a},\ n^{(x)}=n^{(y)}=\frac{\pi c}{4a}.$$

迴轉椭球面法綫方向的单位矢量的分量 ν_x 趋近于零:

$$\nu_x=\frac{x}{a^2}\left(\frac{x^2+y^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}\to\frac{x}{a^2}\frac{c^2}{z}=\frac{xc}{a^2}\left(1-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

因此, 电荷密度为

$$\sigma=\frac{\mathfrak{E}}{4\pi}\frac{\nu_x}{n^{(x)}}=\frac{E_0\rho\cos\varphi}{\pi^2\sqrt{a^2-\rho^2}},$$

式中 ρ, φ 为圓盘平面内的极坐标。

圓盘的偶极矩由公式(4.26)求出, 等于

$$\mathscr{P}=\frac{4a^3}{3\pi}\mathfrak{E}.$$

应注意到, 它与 a^3 成正比, 而不是与圓盘的"体积"a^2c 成正比。

5. 試求迴轉椭球导体外的場势, 椭球的对称軸与外均匀場平行。

解. 对于长迴轉椭球($a>b=c$, 場 $\mathfrak{E}$ 在 x 軸方向), 由計算(4.24)式的积分, 我們得到

$$\varphi=-\mathfrak{E}x\left\{1-\frac{\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+\xi}}-\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+\xi}}}{\operatorname{Arth}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}-\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}\right\}.$$

① 对于与电場垂直的圓盘, 問題不重要, 在整个空間内, 場仍保持均匀, 而在圓盘两側所感生出的电荷为 $\sigma=\pm\mathfrak{E}/4\pi$。

坐标 ξ 与坐标 x 和 $\rho=\sqrt{y^2+z^2}$ 的关系为

$$\frac{\rho^2}{b^2+\xi}+\frac{x^2}{a^2+\xi}=1,$$

在椭球外的空間内，$0\leqslant\xi\leqslant\infty$。

对于扁椭球($a=b>c$)，場 $\mathfrak{E}$ 沿 z 軸方向。由此，在(4.24)式的积分内，必須用 $s+c^2$ 代換 $s+a^2$，而 $\varphi_0=-\mathfrak{E}z$，結果得到

$$\varphi=-\mathfrak{E}z\left\{1-\frac{\sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+c^2}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+c^2}}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}}\right\},$$

而且坐标 ξ 与坐标 z 和 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 的关系为

$$\frac{\rho^2}{a^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}=1.$$

6. 所求与上题相同，但椭球的对称軸与外場垂直。

解. 对于长椭球(場在 z 軸方向)：

$$\varphi=-\mathfrak{E}z\left\{1-\frac{\frac{\sqrt{\xi+a^2}}{\xi+b^2}-\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\xi+a^2}}}{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{Arth}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}\right\}.$$

对于扁椭球(場在 x 軸方向)，

$$\varphi=-\mathfrak{E}x\left\{1-\frac{\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+c^2}}-\sqrt{\frac{\xi+c^2}{a^2+\xi}}}{\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}-\frac{c}{a^2}}\right\}.$$

7. 設均匀电場 $\mathfrak{E}$ 沿 z 軸方向(在半空間 $z<0$ 内)，被一有圓孔的接地导电平面 $z=0$ 所包圍。試求平面上的場和电荷分布。

解. 我們把有一半徑为 a、其圓心在坐标原点处的圓孔的 xy 平面，視为迴轉单叶双曲綫面的极限情况：

$$\frac{\rho^2}{a^2-|\eta|}-\frac{z^2}{|\eta|}=1,\quad \rho^2=x^2+y^2,$$

其中 $|\eta|\to0$。这些双曲面代表 $c=0$ 的扁椭球坐标系的坐标平面族中的一族平面，按照(4.9)式，笛卡儿坐标 z 可用 ξ 和 η 表示为 $z=\sqrt{\xi|\eta|/a}$，而 $\sqrt{\xi}$ 的根按照在上半空間或下半空間内取＋号或－号。

我們求得解的形式为 $\varphi=-\mathfrak{E}zF(\xi)$，并得到函数 $F(\xi)$ 为

$$F(\xi)=\text{常数}\int\frac{d\xi}{\xi^{3/2}(\xi+a^2)}=\text{常数}\left[\frac{a}{\sqrt{\xi}}-\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}}\right]$$

(按照 $z\to+\infty$，即$\sqrt{\xi}\to+\infty$时 $\varphi=0$ 的条件，我們假定积分常数等于零)。这时，負宗量的 arctg 必須理解为

$$\operatorname{arctg}\frac{a}{-\sqrt{\xi}}=\pi-\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}},$$

而不是$-\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{\sqrt{\xi}}\right)$。相反地，在圓孔平面上($\xi=0$)，电势的連續性遭到破坏。选擇常系数使 $z\to-\infty$时(即$\sqrt{\xi}\to-\infty$时，$\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{\sqrt{\xi}}\right)\to\pi$)，$\varphi=-\mathfrak{E}z$，最后得到

$$\varphi=-\frac{\mathfrak{E}z}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}}-\frac{a}{\sqrt{\xi}}\right]=-\frac{\mathfrak{E}}{\pi}\sqrt{|\eta|}\left[\frac{\sqrt{\xi}}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}}-1\right].$$

在导体面上，$\eta=0$，电势变为零，这正是預料的結果。

在离开小孔很大距离 $r=\sqrt{z^2+\rho^2}$处，我們有 $\xi\cong r^2$，于是場势的形式(在上半空間內)为

$$\varphi\cong\frac{\mathfrak{E}a^2}{3\pi}\frac{\sqrt{-\eta}}{\xi}=\frac{\mathfrak{E}a^3z}{3\pi r^3},$$

也即是場是电偶极子型的，相应的偶极矩为$\mathscr{P}=\mathfrak{E}a^3/3\pi$。

場强隨$\frac{1}{r^3}$而減小，因而通过离开无限远表面的电通量(在半空間$z>0$內)变为零，这表明，穿过小圓孔的力綫在导体平面的上側閉合起来。

导电平面上的电荷分布算出如下：

$$\sigma=\mp\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\mp\frac{a}{4\pi\sqrt{\xi}}\frac{\partial\varphi}{\partial\sqrt{-\eta}}=\pm\frac{\mathfrak{E}}{4\pi^2}\left[\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}}-\frac{a}{\sqrt{\xi}}\right],$$

式中干号分別指平面的上側和下側。按照联系 ξ 与 ρ、z 的公式：

$$\frac{\rho^2}{a^2+\xi}+\frac{z^2}{\xi}=1,$$

在 $z=0$ 的平面上，我們有$\sqrt{\xi}=\pm\sqrt{\rho^2-a^2}$。于是，在导电平面下側的电荷分布由下式給出：

$$\sigma=-\frac{\mathfrak{E}}{4\pi^2}\left(\pi-\arcsin\frac{a}{\rho}+\frac{a}{\sqrt{\rho^2-a^2}}\right).$$

当 $\rho\to\infty$时，我們有 $\sigma=-\mathfrak{E}/4\pi$，这正是应当的。在上側

$$\sigma=-\frac{\mathfrak{E}}{4\pi^2}\left(\frac{a}{\sqrt{\rho^2-a^2}}-\arcsin\frac{a}{\rho}\right).$$

8. 所求与上題相同，但导电平面上的小孔是寬度为 $2b$ 的直綫縫。

解. 我們把沿 x 軸方向具有狹縫的 xy 平面看作双曲面柱体的极限情况：

$$\frac{y^2}{b^2-|\eta|}-\frac{z^2}{|\eta|}=1,$$

这时 $|\eta|\to 0$。这些双曲面柱体代表 $a\to\infty$, $c\to 0$ 时的橢球坐标平面族中的一族平面。笛卡儿坐标为 $z=\sqrt{\xi|\eta|/b}$。

和例題 7 一样，我們求得解的形式为 $\varphi=-\mathfrak{E}zF(\xi)$，并得到函数 F 为

$$F=\text{常数}\int\frac{d\xi}{\xi^{3/2}\sqrt{\xi+b^2}}.$$

这里的系数和积分常数分别由 $z\to+\infty$ 和 $z\to-\infty$（也即是 $\sqrt{\xi}\to+\infty$ 和 $\sqrt{\xi}\to-\infty$）时 $F=0$ 和 $F=1$ 的条件求出，最后得到

$$\varphi=\frac{\mathfrak{E}}{2b}\left[\sqrt{(\xi+b^2)}\mp\sqrt{\xi}\right]\sqrt{|\eta|},$$

在上式中，我們把根 $\sqrt{\xi}$ 理解为正值，而"$-$"和"$+$"相应于区域 $z>0$ 和 $z<0$。

在上半空間內，离开狹縫很远处，我們有 $\xi\cong y^2+z^2=r^2$，而場势为

$$\varphi\cong\frac{b\mathfrak{E}}{4}\sqrt{\frac{|\eta|}{\xi}}=\frac{\mathfrak{E}b^2z}{4r^2},$$

这即是狹縫单位长度上的偶极矩为 $\mathfrak{E}b^2/8$ 的二維偶极子型的場（参閱 §3 內例題中的公式）。

导电平面上的电荷分布由下式得出：

$$\sigma=-\frac{\mathfrak{E}}{8\pi}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2-b^2}}\pm 1\right).$$

§5. 导体上的力

在电場內，导体表面从一側受到电場的一定作用力，这些力容易算出如下。

眞空中电場內的动量流密度，由熟知的麦克斯韦应力張量給

出①:

$$-\sigma_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{E^2}{2}\delta_{ik}-E_iE_k\right).$$

作用在导体表面元 $d\mathbf{f}$ 上的力恰好就是从外面“流入”导体內的动量流，即等于 $\sigma_{ik}df_k=\sigma_{ik}n_k df$（由于法向矢量 $\mathbf{n}$ 指向导体外面，而不是指向导体內部，所以正負号改变）。因此，量 $\sigma_{ik}n_k$ 为导体表面单位面积上所受的力 $\mathbf{F}_{表面}$。考虑到在金屬面上場强 $\mathbf{E}$ 只有法向分量，我們得到

$$\mathbf{F}_{表面}=\mathbf{n}\frac{E^2}{8\pi}, \tag{5.1}$$

或者引进面电荷密度 σ，

$$\mathbf{F}_{表面}=2\pi\sigma^2\mathbf{n}=\frac{\sigma\mathbf{E}}{2}.$$

于是，我們得到結論：导体表面所受的力为“負压力”，它指向导体表面的外法綫方向，其数值等于电場的能量密度。

作用在导体上的总力 $\mathbf{F}$，可由将(5.1)式的力对导体的全部表面进行积分而求出：

$$\mathbf{F}=\oint\frac{E^2}{8\pi}d\mathbf{f}, \tag{5.2}$$

但是，通常更方便的是按照力学的普遍原則，对能量 $\mathscr{U}$ 求微分来算出这个量。因此，在坐标軸 q 方向作用在导体上的力为 $-\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial q}$，这里的导数表示导体整个地沿 q 軸方向平行移动时的能量变化。这时能量必須用导体的电荷（場源）来表示，并保持电荷不变进行微分。我們用下角标 e 来表明这种情况，于是可写为

---

① 参閱“場論”第二版 §32，在那里 $-\sigma_{ik}$ 表示为 $T_{\alpha\beta}$。在现在的情况下，我們将这公式应用到不完全与导体表面重合、而是略有偏离的表面上，以便消去导体表面附近場結构的影响（与 2 頁比較）。

$$F_q = -\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial q}\right)_e. \tag{5.3}$$

类似地，作用在导体上的总力矩在任一坐标轴上的投影等于

$$K = -\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \psi}\right)_e, \tag{5.4}$$

式中 ψ 为导体整个地繞該軸的轉动角。

如果将能量表示为場势的函数，而不是表示为导体电荷的函数，則要利用这种函数来算出总力的問题，需要作特别的研究。問题在于，要使运动导体上的电势維持不变，必須求助于局外的物体。例如，把这导体接到另一个电容更大的导体上（电荷儲蓄器），可以保持該导体的电势不变。当导体充上电荷 e_a 时，导体即从“儲蓄器”內取出这些电荷，而这时电荷儲蓄器由于电容較大，它的电势 φ_a 并不会改变。但是，电荷儲蓄器的能量減小了 $e_a\varphi_a$。当导体系統都充上电荷 e_a 时，与导体系統連接的“儲蓄器”的能量总共改变 $-\sum_a e_a\varphi_a$。量 $\mathscr{U}$ 內只包含所研究导体的能量，而不包含“儲蓄器”的能量。在这种意义上可以說，$\mathscr{U}$ 是指能量上非閉合的系統而言。由此可見，对場势保持不变的导体系統而言，起机械能作用的不是 $\mathscr{U}$，而是量

$$\widetilde{\mathscr{U}} = \mathscr{U} - \sum_a e_a\varphi_a. \tag{5.5}$$

把(2.2)式代入，我們得到，$\mathscr{U}$ 与 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 只相差一个正負号：

$$\widetilde{\mathscr{U}} = -\mathscr{U}. \tag{5.6}$$

保持場势不变，将 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 对 q 求微分，就得到力 F_q，也即是

$$F_q = -\left(\frac{\partial \widetilde{\mathscr{U}}}{\partial q}\right)_\varphi = \left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial q}\right)_\varphi. \tag{5.7}$$

由此可見，我們保持电荷不变，或保持电势不变对 $\mathscr{U}$ 取微分，都可以得到导体上所受的力，唯一的差別是，在第一种情况下，导数必

須取負号，而在第二种情况下应取正号。

从微分恒等式

$$d\mathscr{U}=\sum_a \varphi_a de_a - F_q dq \qquad (5.8)$$

出发，利用更为形式的方法，也可得到相同的結果，上式中的$\mathscr{U}$必須看作是导体的电荷和坐标 q 的函数。这恒等式表明，导数 $\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial e_a}=\varphi_a$ 和 $\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial q}=-F_q$。我們把 e_a 变换到变数 φ_a 后，由此得到

$$d\tilde{\mathscr{U}}=-\sum_a e_a d\varphi_a - F_q dq, \qquad (5.9)$$

由此也可得到(5.7)式。

在§2末，我們曾研究了导体在均匀外电場內的能量。不言而喻，在均匀的外电場內，作用于导体上的总力等于零。但是，我們也可以利用(2.14)式的能量表达式，来求出准均匀場 $\mathfrak{E}$ 內，也即是在整个导体范圍內变化很小的場內导体上所受的力。在这种場內，在第一近似下，还可以从(2.14)式算出导体的能量，而力 $\mathbf{F}$ 則定义为这能量的陡度：

$$\mathbf{F}=-\operatorname{grad}\mathscr{U}=\frac{1}{2}\alpha_{ik}V\operatorname{grad}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k. \qquad (5.10)$$

总力矩 $\mathbf{K}$，一般說来，甚至在均匀的外电場內也不为零。根据力学的普遍法則，由研究导体的无穷小虛轉动，我們可以求出 $\mathbf{K}$。在这种轉动时的能量变化与 $\mathbf{K}$ 的关系为 $\delta\mathscr{U}=-\mathbf{K}\delta\boldsymbol{\psi}$，式中 $\delta\boldsymbol{\psi}$ 为轉动角。在均匀場內，导体轉动 $\delta\boldsymbol{\psi}$ 角相当于电場相对于导体轉动 $-\delta\boldsymbol{\psi}$ 角。这时場的变化为 $\delta\mathfrak{E}=-[\delta\boldsymbol{\psi}\cdot\mathfrak{E}]$，而能量变化为

$$\delta\mathscr{U}=\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\mathfrak{E}}\delta\mathfrak{E}=-\delta\boldsymbol{\psi}\left[\mathfrak{E}\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\mathfrak{E}}\right].$$

但 $\partial\mathscr{U}/\partial\mathfrak{E}=-\mathscr{P}$，这从比較(2.13)式和(2.14)式可以看出。因此 $\delta\mathscr{U}=-[\mathscr{P}\mathfrak{E}]\delta\boldsymbol{\psi}$，由此得

$$\mathbf{K}=|\mathscr{P}\mathfrak{E}|, \tag{5.11}$$

这个式子和从眞空內的場論所得到的普通式子符合一致。

如果作用在导体上的总力和总力矩等于零，则导体在电場內保持靜止，于是与导体形变有关的效应(称为电致伸縮)提到首要的地位。作用在导体面上的力(5.1)，引起导体的形状和体积改变。这时由于力具有拉伸的性质，因而导体的体积增大。但要完全求出形变，必須解彈性理論的方程，这时导体表面的力分布如(5.1)式所示。但是，如果只对体积变化感兴趣，则問題的解法就要簡单得多。

为此必須考虑到，如果形变很小(实际上电致伸縮就是这种情况)，则形状变化对体积变化所生的影响是二級小效应。因此，在第一近似下，可以把体积的变化看作形状不发生变化的形变，也即是可以把它看成由某种有效剩余压强Δp所引起的各向伸长，这种压强均匀分布于物体的表面，而不是像(5.1)式那样的精确分布。将Δp乘上物体的各向伸长系数(均匀膨脹系数)，就得到体积的相对变化。按照熟知的公式，压强Δp定义为导体的电能$\mathscr{U}$对其体积的导数$\Delta p=-\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial V}$①。

假設形变电場是由带电导体本身所产生的。于是，能量为$\mathscr{U}=e^2/2C$，而压强为

$$\Delta p=-\frac{e^2}{2}\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{C}\right).$$

当导体形状不变时，导体的电容(长度量綱的量)与其綫度成正比，即与$V^{\frac{1}{3}}$成正比。因此，我們得到

$$\Delta p=\frac{e^2}{6CV}=\frac{e\varphi}{6V}. \tag{5.12}$$

① 这样求出的量为导体本身作用于表面上的压强，由改变正負号，可以得到从外面作用在表面的压强。

如果未带电导体是在均匀的外电場 $\mathfrak{E}$ 內，則导体的能量由(2.14)式給出。因此，在这种情况下，拉伸压强为

$$\Delta p=\frac{1}{2}\alpha_{ik}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k. \tag{5.13}$$

例　題

1. 設电容为 c（导体綫度的数量級）的小导体距离半徑为 a（$a\gg c$）的球形导体中心为 r。假定从导体 c 至球面的距离 $r-a$ 只大于 c，但不大于 a。两导体用細导綫連接后，于是它們的电势 φ 相同。試求两个导体的相互斥力。

解．由于导体 c 很小，可以假設，导体的电势为大球在 r 处所产生的电势 $\frac{\varphi a}{r}$ 和导体本身的电荷 e 所产生的电势 $\frac{e}{c}$ 之和。由此，我們得到 $\varphi=\frac{\varphi a}{r}+\frac{e}{c}$ 或 $e=c\varphi\left(1-\frac{a}{r}\right)$。所求的相互作用力 F 定义为导体 c 的电荷 e 与球的电荷 $a\varphi$ 之間的庫侖斥力：

$$F=\frac{ac\varphi^2}{r^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)$$

（这式子的正确程度达到 c 的更高冪次的項）。由此可見，小导体受到球的斥力，随趋近球面而減小。

2. 設带电球形导体被切为两半。試求两半球的相互斥力①。

解．設两半球被无限狹的小縫分开，將力 $\left(\frac{E^2}{8\pi}\right)\cos\theta$ [(5.1)式的力 F 在垂直于半球分界面的方向上的投影]对它們的表面进行积分，我們就可求出每一半球上所受的力 F。在狹縫內，$E=0$，而在球的外表面上，$E=\frac{e}{a^2}$，这里 a 为球的半徑，而 e 为球上的总电荷。結果得到

$$F=\frac{e^2}{8a^2}.$$

3. 所求与上題相同，但未带电球在垂直于分界面的均匀外电場 $\mathfrak{E}$ 內。

解．与例題 2 相似，所不同的只是在球表面上，$E=3\mathfrak{E}\cos\theta$（按照 §3 例

① 在例題 2 和 3 內，假設两半球的电势相同。

题1)。于是所求的斥力为

$$F=\frac{9}{16}a^2\mathfrak{E}^2.$$

4. 試求均匀外电場内的导电球的体积变化和形状变化。

解. 体积的变化为$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta p}{K}$，式中$K$为物质的各向伸长模量，而$\Delta p$由(5.13)式求出，对球来說，$\alpha_{ik}=\delta_{ik}\alpha=\frac{3}{4\pi}\delta_{ik}$($\alpha$从§3例題1得出)，于是

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{3\mathfrak{E}^2}{8\pi K}.$$

由于形变結果，球变成长橢球。为了求出这长橢球的偏心率，可以把形变看作在导体体积內的均匀切变，如同在求总体积的变化时，我們曾把它看成均匀的各向伸长形变一样。

形变物体的平衡条件，可以表述成靜电能和彈性能之和为极小值的条件。按照(2.12)和(4.26)式，其中第一种能量等于

$$\mathcal{U}_{\text{电能}}=-\frac{V}{8\pi n}\mathfrak{E}^2\cong-\frac{3V\mathfrak{E}^2}{8\pi}-\frac{3V}{10\pi}\frac{a-b}{R}\mathfrak{E}^2,$$

式中R为球原来的半徑，a和b是橢球的半軸，而

$$n\cong\frac{1}{3}-\frac{4}{15}\frac{a-b}{R}$$

为退极化系数[参閱(4.33)式]。

由于形变是軸对称的(对場方向——即x軸)，因而不为零的只是形变張量的分量：u_{xx}和$u_{yy}=u_{zz}$。因为我們所研究的平衡是相对于形状变化而言，这时我們可以假定体积是不变的，即$u_{ii}=0$。因此，彈性能①可以写成

$$\mathcal{U}_{\text{彈性}}=V\frac{u_{ik}\sigma_{ik}}{2}=\frac{1}{3}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})(u_{xx}-u_{yy})V$$

(σ_{ik}是彈性应力張量)。于是我們有

$$(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})=2\mu(u_{xx}-u_{yy}),$$

式中μ为物质的切变模量，而$u_{xx}-u_{yy}=(a-b)/R$。因此，

$$\mathcal{U}_{\text{彈性}}=\frac{2\mu}{3}\frac{(a-b)^2}{R^2}V.$$

对$(a-b)$求出$\mathcal{U}_{\text{彈性}}+\mathcal{U}_{\text{电能}}$之和的极小值，我們得到

① 参閱"連續介质力学"第二版，第二部分，§4.

$$\frac{a-b}{R}=\frac{9}{40\pi\mu}\mathfrak{E}^2.$$

5. 試求沿带电的液态导体平面上傳播的波的频率和波长之間的关系(在重力場內)，并求出該面的穩定条件(Я. И. 弗兰克耳, 1935)。

解. 設波沿 x 軸方向傳播, z 軸的方向竪直向上。液体表面各点的竪直移动为 $\zeta=ae^{i(kx-\omega t)}$。当表面静止时，表面上的場强为 $E_z=E=4\pi\sigma_0$，而場势为 $\varphi=-4\pi\sigma_0 z$，式中 σ_0 为面电荷密度。振动面上的場势我們写为

$$\varphi=-4\pi\sigma_0 z+\varphi_1,$$

$$\varphi_1=\text{常数}\cdot e^{i(kx-\omega t)}e^{-kz},$$

式中 φ_1 为滿足方程 $\Delta\varphi_1=0$ 的小修正值，当 $z\to\infty$，它变为零。在导体表面上，电势必須为恒值，我們令它为零，于是由此得到

$$\varphi_1\Big|_{z=0}=4\pi\sigma_0\zeta.$$

按照(5.1)式，作用在带电液体表面的附加負压强，精确到 φ_1 的一次項，等于

$$\frac{E^2}{8\pi}\cong\frac{E_z^2}{8\pi}\cong2\pi\sigma_0^2+k\sigma_0\varphi_1\Big|_{z=0}=2\pi\sigma_0^2+4\pi\sigma_0^2k\zeta.$$

常数項 $2\pi\sigma_0^2$ 是不重要的(可以把它包含在恒定外压强內)。

研究波內的流体力学运动完全与毛細波理論相类似①，所不同的只是存在上面所指出的附加压强。在液体表面上，我們得到边界条件为

$$\rho g\zeta+\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{z=0}-\alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-4\pi\sigma_0^2k\zeta=0,$$

式中 α 为表面張力系数，ρ 为液体的密度，而 Φ 为它的速度势。Φ 和 ζ 之間还存在下列的关系式:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=0}.$$

将 $\zeta=ae^{i(kx-\omega t)}$ 和 $\Phi=Ae^{i(kx-\omega t)}e^{kz}$ 代入上面两个关系式內，并消去 a 和 A 后，我們得到所求的 k 与 ω 之間的关系式为

$$\omega^2=\frac{k}{\rho}(g\rho-4\pi\sigma_0^2k+\alpha k^2).\tag{1}$$

为了使液面是穩定的，频率 ω 对 k 的任何值必須为实值(否則 ω 将为含有正的虛数部分的复数，而且因子 $e^{-i\omega t}$ 将无限地增加)。(1)式右側为正值的条件为 $(4\pi\sigma_0^2)^2-4g\rho\alpha<0$，由此得

① 参閱"連續介质力学"第二版，第一部分 § 61。

$$\sigma_0^4 < \frac{g\rho\alpha}{4\pi^2}.$$

这也就是稳定条件。

6. 試求带电球形滴的稳定条件(瑞利, 1882)。

解. 球滴的靜电能和表面能之和为

$$\mathscr{U} = \frac{e^2}{2C} + \alpha S,$$

式中 α 是液体的表面張力系数, C 为球滴的电容, S 是它的表面面积。当球伸长变为椭球时发生不稳定(e 增加),并且这种不稳定发生于 $\mathscr{U}$ 变成偏心率的递减函数的时刻(保持球滴体积不变)。球的形状永远相应于极値 $\mathscr{U}$, 因此, 稳定条件为

$$\left.\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial(a-b)^2}\right|_{a=b} > 0,$$

式中 a 和 b 为椭球的半軸, 而进行微分时 $ab^2 =$ 常数。利用熟知的椭球表面公式和它的电容公式(4.18), 在經过較为冗长的計算后, 我們得到

$$e^2 < 16\pi a^3 \alpha.$$

第二章　电介质的静电学

§6. 电介质内的静电場

我們現在轉到研究另一类物质——电介质——內的恒定电場。

电介质的主要性质是它的內部不可能流过恒定电流。因此，和导体不同，电介质內的恒定电場强度不应等于零，因而我們必須求出描写这种場的方程。由对(1.3)式求平均值，得到其中一个方程，和前面一样，这方程为

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0. \tag{6.1}$$

对方程 $\operatorname{div}\mathbf{e}=4\pi\rho$ 求平均值，得到第二个方程：

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\bar{\rho}. \tag{6.2}$$

現在我們假定，沒有任何外电荷被带到电介质的內部；这是一种最普通也是最重要的情况。于是，电介质全部体积內的总电荷，在将电介质带入电場以后，也仍然等于零：

$$\int\bar{\rho}\,dV=0,$$

这个积分式对任何形状的电介质都必須滿足，它表明平均电荷密度可以写成某一矢量(一般用 $-\mathbf{P}$ 表示)的散度形式：

$$\bar{\rho}=-\operatorname{div}\mathbf{P}, \tag{6.3}$$

在电介质外，$\mathbf{P}=0$。实际上，如果假想，电介质被一个表面所包圍，并且这表面处处在电介质以外通过，对这表面所圍成的体积进行积分，我們得到

$$\int\bar{\rho}\,dV=-\int\operatorname{div}\mathbf{P}\,dV=-\oint\mathbf{P}\,d\mathbf{f}=0.$$

量 $\mathbf{P}$ 称为物体的电介质极化矢量(或簡单地称为极化矢量); $\mathbf{P}$ 不等于零的电介质称为极化电介质。矢量 $\mathbf{P}$ 不但决定体积密度(6.3),而且也决定分布于极化电介质表面的面电荷密度 σ。如果对两个无限靠近的单位面积(两側和电介质面相接)所圍成的体积元积分(6.3)式, 并考慮到在外面的面积上 $\mathbf{P}=0$, 于是我們得到[和(1.9)式的推导比較]

$$\sigma=P_n, \tag{6.4}$$

式中 P_n 是矢量 $\mathbf{P}$ 在表面外法綫方向上的分量。

为了闡明量 $\mathbf{P}$ 的物理意义, 我們来研究电介质內全部电荷的总偶极矩。与总电荷不同,总偶极矩不应等于零。按照偶极矩的定义,这即是积分:

$$\int \mathbf{r}\bar{\rho}\,dV.$$

把(6.3)式的 $\bar{\rho}$ 代入上式, 再对包圍整个物体的体积进行积分, 我們得到

$$\int \mathbf{r}\bar{\rho}\,dV=\int \mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{P}\,dV=-\oint \mathbf{r}(d\mathbf{f}\mathbf{P})+\int(\mathbf{P}\nabla)\mathbf{r}\,dV.$$

对表面的积分为零,而在第二个积分內,我們有$(\mathbf{P}\nabla)\mathbf{r}=\mathbf{P}$,于是

$$\int \mathbf{r}\bar{\rho}\,dV=\int \mathbf{P}\,dV. \tag{6.5}$$

由此可見, 极化矢量代表电介质单位体积的偶极矩(或如通常所說,电矩)①。

把(6.3)代入(6.2)式,我們得到静电場的第二个方程为

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=0, \tag{6.6}$$

这里引入了一个新的量 $\mathbf{D}$,定义为

① 应該注意到,电介质內的关系式(6.3)和电介质外的条件 $\mathbf{P}=0$ 本身, 还不足以唯一地确定 $\mathbf{P}$; 在电介质內部区域內, 可以在 $\mathbf{P}$ 上加上一个形式如 $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ 的矢量。只有和偶极矩联系起來,最后才能确定 $\mathbf{P}$。

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}, \tag{6.7}$$

称为电感应强度[①]。对电介质內的电荷密度求平均值，就可得到(6.6)式。如果在电介质內从外面引入外电荷(我們将称它为旁电荷)，那末，在(6.6)式的右側还应該添上旁电荷密度:

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho_{旁}. \tag{6.8}$$

在两种不同的电介质的分界面上，必須滿足一定的边界条件。其中一个条件是从方程 $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$ 得出的結果。如果分界面的物理性质[②]是均匀的，那末，这个条件要求电場强度的切向分量必須是連續的:

$$E_{1t}=E_{2t} \tag{6.9}$$

[和条件(1.7)的推导比較]。再从方程 $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$，可以得到第二个条件，它要求垂直于分界面的感应强度分量必須是連續的:

$$D_{1n}=D_{2n}. \tag{6.10}$$

实际上，法向分量 $D_n=D_z$ 的突变，表明导数 $\frac{\partial D_z}{\partial z}$ 以及 $\operatorname{div}\mathbf{D}$ 变成无穷大。

在电介质和导体的分界面上，$\mathbf{E}_t=0$，又从(6.8)式，得到法向分量的条件为

$$\mathbf{E}_t=0,\quad D_n=4\pi\sigma, \tag{6.11}$$

式中 σ 是导体表面上的电荷密度。

§7. 介电常数

要使(6.1)和(6.6)式成为确定靜电場的完全方程組，我們还

---

① $\mathbf{D}$ 有时也用麦克斯韦所采用的"电位移"名称，但这个名詞应該认为是过时了。

② 也即指接触电介质的成分、溫度等而言，如果电介质是晶体，那末表面的晶向应該保持不变。

必須加上一个联系感应强度 D 和电場强度 E 的关系式。在絕大多数的情况下，可以假定这种关系是綫性的。这种綫性关系相应于 D 展开为 E 的冪級数的头几項，并且是由于外电場小于內部的分子場。

D 对 E 的綫性相依关系，在电介质为各向同性的最重要情况下，取特别簡单的形式。显然，在各向同性的电介质內，矢量 D 和 E 的方向应該相同。因此，它們之間的綫性关系归結为簡单的比例关系[①]：

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}, \tag{7.1}$$

系数 ε 称为物质的介电常数，它是物质的热力学状态的函数。

和电感应强度一样，极化强度也和电場成正比：

$$\mathbf{P}=\kappa\mathbf{E}\equiv\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\mathbf{E}. \tag{7.2}$$

量 κ 称为物质的极化系数(或物质的电介质极化率)。下面(§ 14)将证明，介电常数总是大于 1；因而极化率也永远是正的。稀疏媒质(气体)的极化率可以假定与它的密度成正比。

在两种各向同性的电介质的分界面上，边界条件(6.9)和(6.10)取如下的形式：

$$E_{t1}=E_{t2}, \quad \varepsilon_1 E_{n1}=\varepsilon_2 E_{n2}. \tag{7.3}$$

由此可見，电場强度的法向分量发生突变，它与两种媒质的介电常数成反比地变化。

在均匀的电介质內，$\varepsilon=$常数，于是从方程 $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$ 得出：

---

① 但是，应該說明，这种关系假定了 D 与 E 同时变为零，严格說来，只在物理性质(成分、温度等)为均匀的电介质內才是正确的。在非均匀物体內，即使 $\mathbf{E}=0$，D 的值也可以不为零，并且由沿物体变化的热力学量的陡度来决定。但是，这些項很小，实际上在任何現象中都不起作用。因此，甚至在不均匀物体內，我們以后也将用(7.1)式。

$\operatorname{div}\mathbf{P}=0$。由(6.3)的定义，这表明，在这种物体內不存在体电荷密度[面电荷密度(6.4)，一般說来并不为零]。相反地，如果电介质不是均匀的，那末我們就得到不为零的体电荷密度：

$$\bar{\rho}=-\operatorname{div}\mathbf{P}=-\operatorname{div}\frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon}\mathbf{D}=-\frac{\mathbf{D}}{4\pi}\operatorname{grad}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}=$$

$$=-\frac{\mathbf{E}}{4\pi\varepsilon}\nabla\varepsilon.$$

如果按照 $E=-\operatorname{grad}\varphi$ 引入电場势，則(6.1)式自动地得到滿足，而由方程 $\operatorname{div}\mathbf{D}=\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E}=0$ 得出

$$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi)=0. \tag{7.4}$$

这个方程只在均匀的介电媒质內才变成通常的拉普拉斯方程。边界条件(7.3)可以改写成如下的場势条件：

$$\varphi_1=\varphi_2,$$
$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \tag{7.5}$$

(場势的切向导数为連續的条件与 φ 本身的連續性条件完全等效)。

在块状均匀的电介质內，对每一均匀部分，(7.4)式都变成拉普拉斯方程 $\Delta\varphi=0$，于是介电常数只是通过条件(7.5)出現在問題的解內。但是这些条件只包含互相接触的两种媒质的介电常数之比。特别是，对被介电常数为 ε_1 的媒质所包圍的介电常数为 ε_2 的介电物体，求这种静电学問題的解因而就归結为求眞空內介电常数为 $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ 的介电物体的静电学問題的解。

現在来研究一个問題：如果导体不是在眞空內，而是在各向同性的均匀介电媒质內，則前一节所得到的关于导体静电場的結果应如何改变。在两种情况下，电势的分布都可用方程 $\Delta\varphi=0$ 来描写，其边界条件是在导体表面 φ 保持不变，所不同的只是代替与面电荷密度的关系：$E_n=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=4\pi\sigma$，現在是

$$D_n = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 4\pi\sigma. \tag{7.6}$$

由此可見，求眞空內带电导体的电場問題的解，可由对电勢和电荷作形式代換：$\varphi\to\varepsilon\varphi$，$e\to e$，或者 $\varphi\to\varphi$，$e\to e/\varepsilon$，变成求介电媒质內的相同問題的解。当导体的电荷給定时，場勢和电場强度与它們在眞空內的数値比較，減小 ε 倍：場的这种減小，可以直观地解釋为导体上的电荷被邻接的极化电介质上的面电荷所部分"屏蔽"的結果。如果导体的电勢保持不变，則电場也保持不变，但导体的电荷增加了 ε 倍。

最后应該指出，在靜电学中，可以形式地把导体（未带电的）看作为介电常数无限大的物体，这即是說，导体对外电場的影响，和 $\varepsilon\to\infty$ 的电介质（相同形状）所产生的影响相同。实际上，由于感应强度 $\mathbf{D}$ 的边界条件是有限的，因此，在物体內部，甚至 $\varepsilon\to\infty$ 时，它也必須保持为有限的；但这表明了在这种場內，$\mathbf{E}=0$，这和导体的性质符合一致。

例 題

1. 設有点电荷 e 距离两种不同的介电媒质的分界面为 h，試求这点电荷所产生的电場。

解. 設在媒质 1 內电荷 e 所在的点为 O 点，而它在分界面另一側的鏡像（在媒质 2 內）为 O' 点（图 10）。現在求出媒质 1 內的电場是两个点电荷——电荷 e 和 O' 点上的虛电荷 e'——所产生的电場（参照 §3 的鏡像法）：

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} + \frac{e'}{\varepsilon_1 r'},$$

式中 r，r' 分别是观测点至 O 点和 O' 点的距离。現在求媒质 2 內的場是 O 点的虛电荷 e'' 所产生的場：

$$\varphi_2 = \frac{e''}{\varepsilon_2 r}.$$

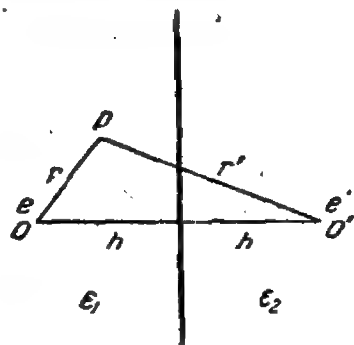


图 10

在分界面上($r=r'$), 必須滿足条件(7.5), 从(7.5)式, 我們得到方程:

$$e-e'=e'', \quad \frac{e+e'}{\varepsilon_1}=\frac{e''}{\varepsilon_2};$$

由此得

$$e'=e\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}, \quad e''=e\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}. \tag{1}$$

当 $\varepsilon_2\to\infty$, 有 $e'=-e$, $\varphi_2=0$; 也就是我們又回到§3中所得到的对导电平面附近的点电荷所产生的場的結果。

作用在电荷 e 上的力("鏡像力")等于

$$F=\frac{ee'}{(2h)^2\varepsilon_1}=\left(\frac{e}{2h}\right)^2\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)};$$

$F>0$ 相应于斥力。

2. 与上題同, 設有带电的无限长直导綫, 与分界面平行, 并距分界面为 h, 試求这导綫所产生的場。

解. 和前一問題的解法完全相似, 所不同的只是在两种媒质内的場势为

$$\varphi_1=-\frac{2e}{\varepsilon_1}\ln r-\frac{2e'}{\varepsilon_2}\ln r', \quad \varphi_2=-\frac{2e''}{\varepsilon_2}\ln r,$$

式中 e, e', e'' 分别是导綫单位长度和它的"鏡像"上的电荷, 而 r, r' 是在与导綫垂直的平面内的距离。对于 e, e' 和 e'', 我們得到和(1)式相同的式子, 而作用在导綫单位长度上的力为

$$F=\frac{2ee'}{2h\varepsilon_1}=\frac{e^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{h\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}.$$

3. 設有带电的无限长直导綫与半徑为 a 的圓柱体($\varepsilon=\varepsilon_2$)平行并距离其軸为 b ($b>a$)(导綫在介电常数为 ε_1 的媒质内), 試求这导綫所产生的場①。

解. 我們把媒质 *1* 内的場当作这样三条导綫在均匀电介质 ε_1 内所产生的場, 其中一条为实的带电导綫在每单位长度上带着电荷 e(通过图 11 中的 O 点), 其它两条都为虛的带电导綫, 分别在每单位长度上带着电荷 e' 和 $-e'$, (分别通过 A 点和 O' 点)。A 点至圓心的距离为

$$AO'=\frac{a^2}{b};$$

于是, 圓周上的各点分别至 O 点和 A 点的距离 r 和 r', 保持恒定的比值.

① 介电球附近的点电荷的类似問題, 不能在有限形式下解出。

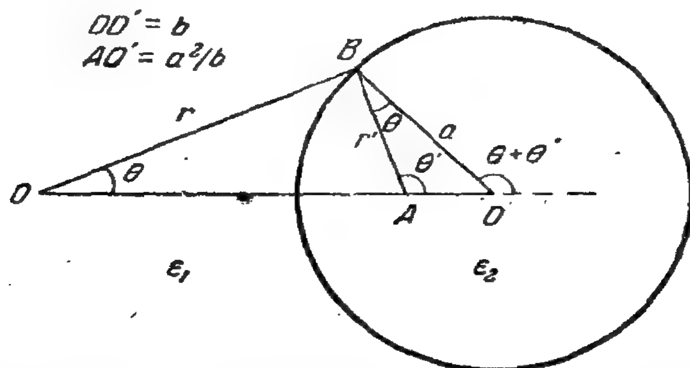


图 11

$\frac{r'}{r}=\frac{a}{b}$，因而在这圓周上，边界条件能够滿足。同样，求出媒质 2 內的場是通过 O 点的导綫上的虛电荷 e'' 在均匀媒质 ε_2 內所产生的場。

分界面上的边界条件，用电势 $\varphi(\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi)$ 和由 $\mathbf{D}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$（符合方程 $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$）所定义的矢势 $\mathbf{A}$（参閱 § 3）可以方便地表示出来；在平面問題中，矢量 $\mathbf{A}$ 的方向指向 z 軸（即垂直于图平面）。于是 $\mathbf{E}$ 的切向分量和 $\mathbf{D}$ 的法向分量为連續的条件，与下列的条件等效：

$$\varphi_1=\varphi_2,\quad A_1=A_2.$$

带电导綫所产生的場，用极坐标 $r,\ \theta$ 时，为 $\varphi=-\frac{2e}{\varepsilon}\ln r+$常数，$A=2e\theta+$常数（与(3.18)式比較）。因此，边界条件为

$$\frac{2}{\varepsilon_1}(-e\ln r-e'\ln r'+e'\ln a)=-\frac{2e''}{\varepsilon_2}\ln r+\text{常数},$$

$$2[e\theta+e'\theta'-e'(\theta+\theta')]=2e''\theta$$

（各角的符号如图 11 所示；并利用了相似三角形 $OO'B$ 和 $BO'A$）。由此得出：$\varepsilon_2(e+e')=\varepsilon_1e''$，$e-e'=e''$，并且对 e' 和 e''，重新得到例題 1 的(1)式。

作用于带电导綫单位长度上的力与 OO' 平行，并等于

$$F=eE=\frac{2ee'}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{OA}-\frac{1}{OO'}\right)=$$

$$=\frac{2e^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)a^2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)b(b^2-a^2)}$$

（$F>0$ 相应于斥力）。

4. 所求与前題一样，但导綫通过介电常数为 ε_2 的圓柱体內部（$b>a$）。

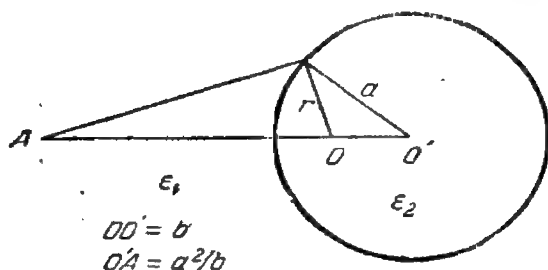


图 12

解. 我們求出媒质 2 內的場是实导綫 e(图 12 中的 O 点) 和通过圓柱外 A 点的虛导綫 e' 所产生的場。求出媒质 1 內的場是分別通过 O 和 O''、电荷分別为 e'' 和 $e-e''$的导綫所产生的場。利用和前一問題相同的方法, 我們得到

$$e'=-e\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2},\quad e''=e\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}.$$

导綫所受到的圓柱体的斥力(当 $\varepsilon_2>\varepsilon_1$ 时)为

$$F=\frac{2ee'}{\varepsilon_2}\frac{1}{OA}=\frac{2e^2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)b}{\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(a^2-b^2)}.$$

5. 試証明: 由 $\mathbf{r}_A$ 点处的点电荷 e 在任意的非均匀介电媒质內的 $\mathbf{r}_B$ 点处所产生的場势 $\varphi_A(\mathbf{r}_B)$, 等于由 $\mathbf{r}_B$ 点处的相同电荷在 $\mathbf{r}_A$ 点处所产生的場势 $\varphi_B(\mathbf{r}_B)$。

解. 場势 $\varphi_A(\mathbf{r})$ 和 $\varphi_B(\mathbf{r})$ 滿足下列方程:

$$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi_A)=-4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_A),$$
$$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi_B)=-4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_B).$$

用 φ_B 乘第一式, φ_A 乘第二式, 然后从第一式減去第二式, 我們得到

$$\operatorname{div}(\varphi_B\varepsilon\nabla\varphi_A)-\operatorname{div}(\varphi_A\varepsilon\nabla\varphi_B)=$$
$$=-4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_A)\varphi_B(\mathbf{r})+4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_B)\varphi_A(\mathbf{r}).$$

把这个等式对全部空間进行积分, 就得到所求的关系式为

$$\varphi_A(\mathbf{r}_B)=\varphi_B(\mathbf{r}_A).$$

§ 8. 介电橢球

在均匀外电場內的介电橢球的极化, 具有一些奇异的特征, 因而引起了特别的兴趣。

我們首先来研究一个簡单的特殊情况——外电場 $\mathfrak{E}$ 內的介电球。我們用 $\varepsilon^{(i)}$ 表示介电球的介电常数, 而用 $\varepsilon^{(e)}$ 表示球外的媒质的介电常数。选擇球面坐标系的原点为球心 (极角 θ 从 $\mathfrak{E}$ 方向算起), 于是求出球外的場势为

$$\varphi^{(e)} = -\mathfrak{E}\mathbf{r} + A\mathfrak{E}\frac{\mathbf{r}}{r^3};$$

第一项是外加电場的电势，而第二項給出球所引起的电势变化，在无穷远处变为零（与§3例題1的解比較）。于是球內的場势可以写为

$$\varphi^{(i)} = -B\mathfrak{E}\mathbf{r};$$

这是满足拉普拉斯方程的唯一函数，它在球心上保持有限，而且只决定于恒矢量$\mathfrak{E}$——上述問題中的唯一参数。

常数A和B从球面上的边界条件求出。但我們立刻注意到，球內的場$\mathbf{E}^{(i)} = B\mathfrak{E}$是均匀的，它和外加場$\mathfrak{E}$的差别只是絕对值不同。

电势为連續的边界条件給出

$$E^{(i)} = \mathfrak{E}\left(1 - \frac{A}{R^3}\right)$$

（R是球的半徑），而由感应强度的法向分量的連續性条件得出

$$D^{(i)} = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}\left(1 + \frac{2A}{R^3}\right).$$

从这两个等式內消去A，我們得到

$$\frac{1}{3}(\mathbf{D}^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)}) = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}, \tag{8.1}$$

或者代入$\mathbf{D}^{(i)} = \varepsilon^{(i)}\mathbf{E}^{(i)}$，于是

$$\mathbf{E}^{(i)} = \frac{3\varepsilon^{(e)}}{2\varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{(i)}}\mathfrak{E}. \tag{8.2}$$

无限长的介电圓柱体在与其軸垂直的外电場中的問題，可以用完全相似的方法来解出（与§3的例題2比較）。柱体內的場，和前一例子中球內的場一样，是均匀的。它满足下列关系式：

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^{(i)} + \varepsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)}) = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E} \tag{8.3}$$

或

$$\mathbf{E}^{(i)}=\frac{2\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)}+\varepsilon^{(e)}}\mathfrak{E}. \tag{8.4}$$

关系式(8.1)和(8.3)沒有显式地包含球或柱体的介电常数$\varepsilon^{(i)}$，具有特别重要的意义，这是因为这两个关系式的正确性和物体內$\mathbf{E}$与$\mathbf{D}$間的綫性关系无关；在任何形式的关系下（包括各向异性物体），它們都成立。下面的类似关系式具有同样的性质。

对于纵向場內的圓柱体:

$$\mathbf{E}^{(i)}=\mathfrak{E}, \tag{8.5}$$

对于与場垂直的平行平面板:

$$\mathbf{D}^{(i)}=\varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}, \tag{8.6}$$

这些关系式可从边界条件直接看出。

一般說来，任何橢球，不論其半軸a、b、c的比値如何，只要放在均匀的外电場內，都具有在其內部产生均匀电場的性质。利用橢球坐标求解介电橢球的极化問題，和§4中解导电橢球的极化問題相似。

現在再求橢球外的場势为(4.22)式：$\varphi'=\varphi_0F(\xi)$，其中函数$F(\xi)$从(4.23)得出。但在橢球內的場势φ_i內不可能包含这样的函数，因为它不滿足在整个橢球体积內場有限这一条件。实际上，我們来研究表面$\xi=-c^2$，它是橢球体积內xy平面上的橢圓面。当$\xi\to-c^2$时，(4.23)式积分的行为和$\sqrt{\xi+c^2}$一样。因此，場强，也即是电势陡度，将和$(\xi+c^2)^{-\frac{1}{2}}$一样变化，而当$\xi=-c^2$时趋向于无穷大。由此可知，对于橢球內的場，只适合$F(\xi)=$常数的解，也就是說必須求出φ_i的形式为

$$\varphi_i=B\varphi_0$$

我們看出，場势φ_i和均匀場势φ_0的差别只是多一个常数因子。換句話說，在橢球內的場是均匀的。

我們在这里不去写出橢球外的意义很小的电場公式。无須实

际写出边界条件，只要利用一些我們已熟知的結果，就可以求得椭球內的均匀电場。

首先假定，椭球在眞空內($\varepsilon^{(e)}=1$)。于是在矢量 $\mathbf{E}^{(i)}$, $\mathbf{D}^{(i)}$ 和 $\mathfrak{E}$(它們的方向都相同，即沿着 x 軸的方向)之間，必須存在下列的綫性关系：

$$aE_x+bD_x=\mathfrak{E}_x,$$

式中的系数 a, b 和椭球的介电常数 $\varepsilon^{(i)}$ 无关，只依賴于椭球的形状。这种綫性关系的存在可以从边界条件的形式看出，从上面球体和圆柱体的例子，我們已证明这一点。

要确定 a 和 b，我們必須注意到，在平常的 $\varepsilon^{(i)}=1$ 的特殊情况下，簡单地有 $\mathbf{E}=\mathbf{D}=\mathfrak{E}$，由此得到 $a+b=1$。另一个我們所熟知的特殊情况是导电椭球。在导体內 $\mathbf{E}^{(i)}=0$，而感应强度 $\mathbf{D}^{(i)}$ 沒有直接的物理意义，但是可以把它看成是一个形式量，它和椭球的总偶极矩的关系为

$$\mathbf{D}=4\pi\mathbf{P}=4\pi\frac{\mathscr{P}}{V}.$$

根据(4.26)式，这时得到

$$D_x=\mathfrak{E}_x\frac{1}{n^{(x)}},$$

也即是系数 $b=n^{(x)}$，因而 $a=1-n^{(x)}$。

这样一来，我們就得到下列的关系式①：

$$(1-n^{(x)})E_x^{(i)}+n^{(x)}D_x^{(i)}=\mathfrak{E}_x. \tag{8.7}$$

对 y 軸和 z 軸方向的場，适合相似的关系式，只是其中的系数

---

① 也可以把它写成下列形式：

$$E_x^{(i)}=\mathfrak{E}_x-4\pi n^{(x)}P_x.$$

量 $4\pi n^{(x)}P_x$ 有时称为退极化場。对于均匀外磁場中的磁化椭球，类似的公式也正确(参看 §27)。与此相关，量 $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$称为退磁系数。

不同。和特殊公式(8.1)与(8.3)一样，不論橢球內 E 和 D 的关系如何，它們都适用。

令$D_x^{(i)}=\varepsilon^{(i)}E_x^{(i)}$，从(8.7)，我們得到橢球內的电場强度为

$$E_x^{(i)}=\frac{\mathfrak{E}_x}{1+(\varepsilon^{(i)}-1)n^{(x)}} \tag{8.8}$$

而橢球的总偶极矩为

$$\mathscr{P}_x=VP_x=\frac{(\varepsilon^{(i)}-1)}{4\pi}VE_x^{(i)}=$$

$$=\frac{abc}{3}\frac{\varepsilon^{(i)}-1}{1+(\varepsilon^{(i)}-1)n^{(x)}}\mathfrak{E}_x \tag{8.9}$$

如果場 $\mathfrak{E}$ 在三个軸上都有分量，那末橢球內的場仍然是均匀的，但是，一般說来，不与 $\mathfrak{E}$ 平行。对任意选擇的坐标系，都可以把关系式(8.7)写成普遍形式:

$$E_i^{(i)}+n_{ik}(D_k^{(i)}-E_k^{(i)})=\mathfrak{E}_i. \tag{8.10}$$

只要用$\frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(e)}}$代替 $\varepsilon^{(i)}$，就可以很簡单地变換到媒质的介电常数不为 1 的情况。这时，(8.7)式取下列形式:

$$(1-n^{(x)})\varepsilon^{(e)}E_x^{(i)}+n^{(x)}D_x^{(i)}=\varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}_x. \tag{8.11}$$

这个式子特别可以应用于无限的介电媒质內橢球形小孔內的电場上，为此，必須令 $\varepsilon^{(i)}=1$。

例 題[①]

1. 試求作用于均匀电場內迴轉橢球上的力矩。

解. 根据普遍公式(16.13)，作用在橢球上的力矩等于$\mathbf{K}=[\mathscr{P}\mathfrak{E}]$，式中 $\mathscr{P}$ 是橢球的偶极矩。在迴轉橢球內，矢量 $\mathscr{P}$ 位于通过对称軸和 $\mathfrak{E}$ 方向的平面內。力矩方向与这个平面垂直，但利用(8.9)式进行計算，得到它的絕对值为

① 这一节的例題中假定橢球在眞空內。

$$K=\frac{(\varepsilon-1)^2|1-3n|\mathfrak{E}^2V\sin 2\alpha}{8\pi[n\varepsilon+1-n][(1-n)\varepsilon+1+n]},$$

式中 α 是 $\mathfrak{E}$ 的方向和椭球的对称軸之間的夹角，而 n 是沿这个軸的退极化系数[于是在与这个軸垂直的方向上，退极化系数为 $\frac{1}{2}(1-n)$]。力矩的方向是，它力图把长椭球$\left(n<\frac{1}{3}\right)$和扁椭球$\left(n>\frac{1}{3}\right)$的对称軸分别轉到与場平行和垂直的位置上。

对导电椭球($\varepsilon\to\infty$)，我們得到

$$K=\frac{|1-3n|}{8\pi n(1-n)}V\mathfrak{E}^2\sin 2\alpha.$$

2. 設空心介电球（介电常数为 ε，內外半徑为 b 和 a）位于均匀外电場 $\mathfrak{E}$ 內，試求球腔內的場。

解. 和正文中解連續球的場相似，我們求出球外眞空內（区域 *1*）和球腔內（区域 *3*）的場势分别为

$$\varphi_1=-\mathfrak{E}\cos\theta\left(r-\frac{A}{r^2}\right),$$

$$\varphi_3=-B\mathfrak{E}r\cos\theta,$$

而介电层內的場势（区域 *2*）为

$$\varphi_2=-C\mathfrak{E}\cos\theta\left(r-\frac{D}{r^2}\right),$$

式中 A，B，C，D 为常数，由 φ 和 $\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ 在边界 *1—2* 和 *2—3* 上的連續性条件定出。由此可見，在球腔內的場 $\mathbf{E}_3=B\mathfrak{E}$ 是均匀的（球形层內的場 $\mathbf{E}_2$ 是非均匀的）。由常数的計算，得到下面的結果：

$$\mathbf{E}_3=\mathfrak{E}\frac{9\varepsilon}{(\varepsilon+2)(2\varepsilon+1)-2(\varepsilon-1)^2(b/a)^3}.$$

3. 与上題相同，試求均匀的横向場內空心圓柱体內的場①。

解. 与前題一样，得到下面的結果：

$$\mathbf{E}_3=\mathfrak{E}\frac{4\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2-(\varepsilon-1)^2(b/a)^2}.$$

---

① 在均匀場內，答案显然为 $\mathbf{E}_3=\mathfrak{E}$。

§9. 混合物的介电常数

如果物质是小弥散的混合物(乳胶体、粉状混合物等等),那末我們可以研究对大于不均匀性綫度的体积所求得的平均电場。对这种平均場来說,混合物是均匀和各向同性的媒质,因而描写这种媒质的特征可以采用介电常数的有效值,我們把它表示为 $\varepsilon_{混合}$。如果 $\overline{\mathbf{E}}$ 和 $\overline{\mathbf{D}}$ 是按上述方式而求得的平均場强度和平均感应强度,则按照 $\varepsilon_{混合}$ 的定义,得到

$$\overline{\mathbf{D}}=\varepsilon_{混合}\overline{\mathbf{E}}. \tag{9.1}$$

如果混合物的粒子是各向同性的,而它們的介电常数之差小于 ε 本身,那末就可以在普遍形式下算出 $\varepsilon_{混合}$ 值,其精确度达到上面差值的二次項。

現在把电場强度的定域值写成 $E=\overline{E}+\delta E$,而介电常数的定域值写成 $\bar{\varepsilon}+\delta\varepsilon$,其中

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{V}\int\varepsilon dV \tag{9.2}$$

是对整个体积所求得的平均值。于是感应强度的平均值为

$$\overline{\mathbf{D}}=\overline{(\bar{\varepsilon}+\delta\varepsilon)(\overline{\mathbf{E}}+\delta\mathbf{E})}=\bar{\varepsilon}\overline{\mathbf{E}}+\overline{\delta\varepsilon\delta\mathbf{E}} \tag{9.3}$$

(因为按照 $\delta\varepsilon$ 和 $\delta\mathbf{E}$ 的定义,它們的平均值等于零)。在零級近似下,$\varepsilon_{混合}=\bar{\varepsilon}$;于是不为零的第一改正項当然为 $\delta\varepsilon$ 的二次量,正如从(9.3)式所看到的一样。

从未平均方程 $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$,精确到一級小項,我們得到

$$\operatorname{div}(\bar{\varepsilon}+\delta\varepsilon)(\overline{\mathbf{E}}+\delta\mathbf{E})=\bar{\varepsilon}\operatorname{div}\delta\mathbf{E}+\overline{\mathbf{E}}\nabla\delta\varepsilon=0,$$

或者代入 $\delta\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\delta\varphi$ 后,得到

$$\bar{\varepsilon}\Delta\delta\varphi=\mathbf{E}\nabla\delta\varepsilon.$$

把 grad 作用到这个方程上,我們得到

$$\Delta\delta\mathbf{E}=-\frac{1}{\bar{\varepsilon}}(\overline{\mathbf{E}}\nabla)\nabla\delta\varepsilon \tag{9.4}$$

对(9.3)式的乘积 $\delta\varepsilon\delta\mathbf{E}$ 求平均值，可分成两步。首先对同一物质的各粒子的体积求平均值也即是保持 $\delta\varepsilon$ 的值不变求平均值。从(9.4)式，很容易地得到这样的 $\delta\mathbf{E}$ 的平均值。但是由于混合物整个說来是各向同性的，在对等式(9.4)两边取平均值后，它右边的算符 $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$ 变成

$$\frac{1}{3}\delta_{ik}\Delta,$$

于是得到

$$\Delta\overline{\delta\mathbf{E}} = -\frac{1}{3\bar{\varepsilon}}\overline{\mathbf{E}}\Delta\delta\varepsilon,$$

由此得

$$\overline{\delta\mathbf{E}} = -\frac{\overline{\mathbf{E}}}{3\bar{\varepsilon}}\delta\varepsilon.$$

将上式两側乘上 $\delta\varepsilon$，然后对混合物的各組分求平均值，得到

$$\overline{\delta\varepsilon\delta\mathbf{E}} = -\frac{\overline{\mathbf{E}}}{3\bar{\varepsilon}}\overline{(\delta\varepsilon)^2}$$

末了，把上式代入(9.3)式，并和(9.1)式比較，就得到所求的結果：

$$\varepsilon_{混合} = \bar{\varepsilon} - \frac{\overline{(\delta\varepsilon)^2}}{3\bar{\varepsilon}}. \tag{9.5}$$

这个式子也可以写成另一种形式，只要我們注意到，精确到二次項，

$$\overline{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} = \overline{(\bar{\varepsilon}+\delta\varepsilon)^{\frac{1}{3}}} = \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{\overline{(\delta\varepsilon)^2}}{9\bar{\varepsilon}^2}\right).$$

因此，

$$\varepsilon_{混合}^{\frac{1}{3}} = \overline{\varepsilon^{\frac{1}{3}}}. \tag{9.6}$$

由此可知，在所考慮的近似下，ε 的立方根是相加的。

例 題

設乳胶体的濃度很小，而媒质(ε_1)和弥散相(ε_2)的介电常数之差为任意值，試求这乳胶体的介电常数。

解. 在积分

$$\frac{1}{V}\int(\mathbf{D}-\varepsilon_1\mathbf{E})dV\equiv\overline{\mathbf{D}}-\varepsilon_1\overline{\mathbf{E}}$$

內，被积表达式只在乳胶体的粒子內部不为零。因此，它与乳胶体的体积濃度 c 成正比。在計算这积分时，可以假定乳胶体粒子在平均电場强度为 $\overline{\mathbf{E}}$ 的外电場內。假定粒子是球形的，并利用(8.2)式，于是得到 $\overline{\mathbf{D}}$ 和 $\overline{\mathbf{E}}$ 之間的比例系数为

$$\varepsilon_{\text{混合}}=\varepsilon_1+c\frac{3(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}.$$

这个式子的正确性精确到 c 的一次項。在 ε_1 和 ε_2 接近的情况下，它与 c 很小时由(9.6)式所求出的結果相等(精确到 c 的一次項和 $\varepsilon_2-\varepsilon_1$ 的二次項)。

§10. 电場內电介质的热力学关系式

由于电場的存在使热力学性质发生改变的問題，对于导体来說并不发生。因为导体內部沒有电場，因而它的热力学量的全部变化，簡单地归結为在总能量上加上一項由导体在周圍空間內所产生的場能①。这个量一般并不依賴于物体的热力学状态(特别是溫度)，因而例如，并不会影响到导体的熵。

相反地，电場透入到电介质內部时，对它的热力学性质发生深远的影响。要研究这些性质，首先必須求出电介质內的电場发生无穷小变化时对被热絕緣的电介质所作的功。

电介质所在的电場，必須設想为由某一带电的外导体所产生的，于是电場的改变可以看成是导体上的电荷改变的結果②。为簡

① 我們在这里略去了电荷和导体物质的結合能，这种結合能将在 §22 中討論。

② 我們得到的最后式子，只包括电介质內的場值，因此与电場的起源无关。由于这一原因，我們无須預先說明电場不是由带电导体产生的；而是例如由带到电介质內的旁电荷或它的热电极化(参看 §13)所产生的。

单起見，我們假設只有一个导体，带的电荷为 e，电势为 φ。于是使导体的电荷增加一个无穷小量 δe 所必須作的功等于

$$\delta R = \varphi \delta e; \tag{10.1}$$

这是把电荷 δe 从无穷远处（該处电势等于零）移到导体表面并因而通过电势差 φ 时，电場对电荷 δe 所作的机械功。我們現在把 δR 变换成用导体周圍的充滿了电介质的空間内的場值来表示的形式。

如果 D_n 是电感应强度矢量在导体表面法綫方向上的投影(对电介质来說为外法綫，对导体說为内法綫)，那末，导体上的面电荷密度等于 $-\frac{D_n}{4\pi}$，于是

$$e = -\frac{1}{4\pi}\oint D_n df = -\frac{1}{4\pi}\oint \mathbf{D} d\mathbf{f}.$$

由于在导体的全部表面上电势 φ 不变，于是我們可以写出

$$\delta R = \varphi \delta e = -\frac{1}{4\pi}\oint \varphi \delta \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\varphi \delta \mathbf{D}) dV.$$

右面的最后积分对导体外的全部体积进行。既然变化后的場和初始場一样，滿足場方程，因此，$\operatorname{div} \delta\mathbf{D} = 0$，于是

$$\operatorname{div}(\varphi \delta \mathbf{D}) = \varphi \operatorname{div} \delta \mathbf{D} + \delta \mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi = -\mathbf{E}\delta\mathbf{D}.$$

这样一来，最后得到下列的重要公式：

$$\delta R = \int \frac{\mathbf{E}\delta\mathbf{D}}{4\pi} dV. \tag{10.2}$$

应着重指出，这个式子内的积分对全部場进行，其中也包括眞空区域，假如电介质沒有充滿导体外的全部空間的話。

对被热絕緣的物体所作的功，不外乎是熵不变时物体能量的变化。因此，在确定物体总能量(其中也包括电場能)的无穷小变化的热力学关系式内，必須添上我們所求得的(10.2)式。用 $\mathscr{U}$ 表示这能量，于是我們得到

$$\delta\mathscr{U}=T\delta\mathscr{S}+\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{E}\delta\mathbf{D}\,dV \tag{10.3}$$

(T 为温度，$\mathscr{S}$ 为物体的熵)[1]。相应地，对于总自由能 $\mathscr{F}=\mathscr{U}-T\mathscr{S}$[2]，我們得到

$$\delta\mathscr{F}=-\mathscr{S}\delta T+\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{E}\delta\mathbf{D}\,dV. \tag{10.4}$$

对导体单位体积內的量，也可以写出相似的热力学关系式。設 U, S 和 ρ 分别为物体单位体积的內能、熵和质量。大家知道，在单位体积內，通常的內能的热力学关系式(不存在电場)为

$$dU=TdS+\zeta d\rho,$$

式中 ζ 是物质的化学势[3]。如果电介质內存在电場，則上式必須再添上从(10.3)式的被积式內所取出的一項，即变成

$$dU=TdS+\zeta d\rho+\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}d\mathbf{D}. \tag{10.5}$$

对于电介质单位体积內的自由能 $F=U-TS$，相应地得到

$$dF=-SdT+\zeta d\rho+\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}d\mathbf{D} \tag{10.6}$$

这里求得的关系式构成了电介质热力学的基础。

我們看出，量 U 和 F 分别是对变数 S, ρ, $\mathbf{D}$ 和 T, ρ, $\mathbf{D}$ 的热力学势。特别是将这些热力学势对矢量 $\mathbf{D}$ 的分量求微分，可以得到电

---

① 談到物体的体积(它的微分通常包含在 $\delta\mathscr{U}$ 的表达式內)时，应該注意到，在电場內，一般說来，物体变成不均勻的，因此体积不再能表征物体的状态。

② 只有当物体內的温度不变时，考虑这个量才有意义。

③ 参閱"統計物理学"第三版 § 24。在那里代替质量密度，我們采用了单位体积內的粒子数 N，它和密度的关系为 $\rho=Nm$(m 是分子的质量)；因此，本书所用的化学势定义和"統計物理学"中的定义相差一个因子(化学势现在是屬于单位体积，而不是屬于物质的一个粒子)。

我們在这里采用字母 ζ 表示化学势，以代替更通常采用的符号 μ；表示物质质量密度的字母 ρ 和表示电荷密度的相同，但这不会引起誤会，因为这两个量永远不会在一起出現。

場强度为

$$\mathbf{E}=4\pi\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{D}}\right)_{S,\rho}=4\pi\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}}\right)_{T,\rho} \tag{10.7}$$

在这方面采用自由能更为方便，因为对上式微分时必须保持溫度不变，而且这时内能要用不大方便的量——熵——来表示。

除了U和F外，引进热力学势也是很有用的，其中的独立变数为矢量 $\mathbf{E}$ 的分量，而不是矢量 $\mathbf{D}$ 的分量。这些量是

$$\widetilde{U}=U-\frac{\mathbf{ED}}{4\pi},\quad \widetilde{F}=F-\frac{\mathbf{ED}}{4\pi}, \tag{10.8}$$

对这些量求微分，我們得到

$$d\widetilde{U}=TdS+\zeta d\rho-\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}d\mathbf{E},$$

$$d\widetilde{F}=-SdT+\zeta d\rho-\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}d\mathbf{E}. \tag{10.9}$$

由此特别得到

$$\mathbf{D}=-4\pi\left(\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \mathbf{E}}\right)_{S,\rho}=-4\pi\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \mathbf{E}}\right)_{T,\rho}. \tag{10.10}$$

我們注意到，带有～符号的字母所表示的热力学量和沒有～符号的热力学量之間的关系，正好相应于§5内对眞空内的导体的靜电場能量所引进的关系式。实际上，和我們在§3开头所进行的完全相似，这时我們利用电介质体积内的方程：$\operatorname{div}\mathbf{D}=0$，和导体表面的边界条件：$D_n=4\pi\sigma$，可以将积分$\int \mathbf{ED}\,dV$变换成

$$\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{ED}\,dV=-\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{D}dV=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_a\int\varphi_a D_n df=\sum_a\varphi_a e_a. \tag{10.11}$$

因此，例如得到内能为

$$\widetilde{\mathscr{U}}=\mathscr{U}-\int\frac{\mathbf{ED}}{4\pi}dV=\mathscr{U}-\sum_a\varphi_a e_a, \tag{10.12}$$

这和(5.5)式的定义完全一致。

把用导体(場源)的电荷和电势所表示的这些量的无穷小变化的公式加以比較，也是很有益的。例如，得到自由能的变化(在给定的溫度下)为

$$(\delta\mathscr{F})_T=\delta R=\sum_a \varphi_a\delta e_a. \tag{10.13}$$

得到 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 的变化为

$$(\delta\widetilde{\mathscr{F}})_T=(\delta\mathscr{F})_T-\delta\sum_a\varphi_a e_a=-\sum_a e_a\delta\varphi_a. \tag{10.14}$$

可以說，沒有～符号的量是对于导体电荷而言的热力学势，而带有～符号的量是对于导体电势而言的热力学势。

由热力学可知[①]，各种不同的热力学势都具有一种性质，即在热平衡状态下，对物体状态的各种变化为极小值。在表述电場內的这些平衡条件时，必須指明，是研究导体(場源)的电荷不变还是电势不变时的状态变化。例如，在平衡状态下，相对于导体的溫度以及电荷或电势不变时所发生的状态变化，$\mathscr{F}$ 或 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 具有极小值(物体的熵不变时，同样的对$\mathscr{U}$和$\widetilde{\mathscr{U}}$也正确)。

如果导体內发生了和电場沒有直接关系的某种过程(例如，化学反应)，那末，对于这些过程而言的平衡条件是：当物体的密度、溫度和感应强度 **D** 不变时 F 为极小值；或当密度、溫度和电場强度 **E** 不变时 $\widetilde{F}$ 为极小值。

到此为止，关于 **D** 对 **E** 的关系，我們幷沒有作任何假設，因此，不論这种关系的性质如何，所得到的热力学关系式都是适用的。現在把它們应用到具有綫性关系：$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ 的各向同性的电介质上。在这种情况下，对关系式(10.5)和(10.6)进行积分，得到

① 参考"統計物理学"第三版，§15，1951。

$$U=U_0(S,\rho)+\frac{D^2}{8\pi\varepsilon},$$
$$F=F_0(T,\rho)+\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}, \tag{10.15}$$

式中 U_0 和 F_0 是指沒有电場时的电介质而言。由此可見，在現在的情况下，量

$$\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}=\frac{ED}{8\pi}$$

是由于电場存在而引起的介电媒质单位体积內的內能变化（保持熵和密度的数值一定）或自由能的变化（保持溫度和密度一定）。

对热力学势 $\widetilde{U}$ 和 $\widetilde{F}$，得到类似的关系式：

$$\widetilde{U}=U_0(S,\rho)-\frac{\varepsilon E^2}{8\pi},$$
$$\widetilde{F}=F_0(T,\rho)-\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \tag{10.16}$$

我們看到，在这种情况下，$U-U_0$ 和 $\widetilde{U}-U_0$ 之差只是相差一个正負号，如同对眞空內的电場所存在的情况一样（§5）。但是，在介电媒质內，只当 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 为綫性关系时，这种簡单的关系式才适用。

为以后参考起見，我們写出物质的熵密度 S 和化学势 ζ 的公式，从（10.15）式得到这些公式如下：

$$S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\rho;\mathbf{D}}=S_0(T,\rho)+\frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho=$$
$$=S_0(T,\rho)+\frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho, \tag{10.17}$$

$$\zeta=\left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)_{T,\mathbf{D}}=\zeta_0(T,\rho)-\frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T. \tag{10.18}$$

不言而喻，只在电介质內部，这两个量才不为零。

将（10.15）式对整个空間进行积分，就得到总自由能。由于（10.11）式，我們有

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0=\int\frac{\mathbf{ED}}{8\pi}dV=\frac{1}{2}\sum_a e_a\varphi_a. \qquad (10.19)$$

上表达式在形式上和真空內的导体的静电場能量的式子相同。从导体的电荷发生无穷小变化时的变化 $\delta\mathscr{F}$(10.13)出发，也可以直接得到这一結果。在现在的情况下，$\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 为綫性关系，于是全部場方程以及其边界条件也都是綫性的。因此，导体的电勢应为（如同真空內的电場一样）导体电荷的綫性函数，对等式(10.13)进行积分，就得到(10.19)式。

应該着重指出，在这些討論中并沒有假設电介质充滿导体外的全部空間。如果是后一种情况，那末利用 §7 末所得到的結果，还可以更进一步证明下列的論断：当导体的电荷不变时，由于介电媒质的出现，导体的电勢和場能，与真空內的場的这些量比較，都減小了 ε 倍。如果导体的电勢保持不变，則电場能量和导体的电荷都增加 ε 倍。

例 题

試求竪直的平面电容器內液面升高的高度 h。

解. 当电容器两板的电勢保持一定时，$\tilde{\mathscr{F}}$ 必須为极小値，其中还必須計及液柱在重力場中的能量 $\frac{\rho g h^2}{2}$。于是从这条件容易得到

$$h=\frac{\varepsilon-1}{8\pi\rho g}E^2.$$

§11. 介电物体的总自由能

如在前一节中所定义的，总自由能 $\mathscr{F}$（或总內能 $\mathscr{U}$）也包括使电介质极化的外电場的能量在內。除了这个量外，研究不包括場能在內的总自由能也是有意义的，而这种場当导体不存在时存在于整个空間內。我們用 $\mathfrak{E}$ 表示这种电場的强度。于是，在上述意

义上的“总”自由能等于积分:

$$\int\left(F-\frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\right)dV, \tag{11.1}$$

式中F是自由能的“密度”。我們在这里采用§10中表示积分$\int F dV$的同一字母$\mathscr{F}$来表示这个量。应該着重指出,$\mathscr{F}$的这两种定义的差别只是归結为一个不依賴于电介质的热力学状态及其性质的量, 因此, 一般并不会影响到这个量的基本的热力学微分关系式[①]。

現在来計算溫度保持不变和媒质的热力学平衡状态沒有被破坏时所发生的电場的无穷小变化所引起的$\mathscr{F}$的变化

因为 $\delta F=\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\delta\mathbf{D}$, 因此得到

$$\delta\mathscr{F}=\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{E}\delta\mathbf{D}-\mathfrak{E}\delta\mathfrak{E})dV.$$

这个式子恒可以改写成下面的形式:

$$\delta\mathscr{F}=\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\delta\mathfrak{E}dV+\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{E}(\delta\mathbf{D}-\delta\mathfrak{E})dV-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{D}-\mathbf{E})\delta\mathfrak{E}dV. \tag{11.2}$$

在第一个积分内,写出 $\delta\mathfrak{E}=-\operatorname{grad}\delta\varphi_0$($\varphi_0$ 是电場$\mathfrak{E}$的电势),并把它进行分部变换:

$$\int\operatorname{grad}\delta\varphi_0(\mathbf{D}-\mathfrak{E})dV=\int\delta\varphi_0(\mathbf{D}-\mathfrak{E})d\mathbf{f}-$$
$$-\int\delta\varphi_0\operatorname{div}(\mathbf{D}-\mathfrak{E})dV.$$

---

① 应該注意,从F内减去$\frac{E^2}{8\pi}$是沒有意义的,因为电場$\mathbf{E}$由于电介质的出現发生了变化,因此,不能把差值: $F-\left(\frac{E^2}{8\pi}\right)$看作是这种电介质的自由能密度。

容易看出，等式右侧的两个积分变成零。对于体积分，可以从方程 $\mathrm{div}\,\mathbf{D}=0$ 和 $\mathrm{div}\,\mathfrak{E}=0$ 直接得到，电介质内的場和眞空内的場都分别滿足这些方程。第一个积分对产生場的导体表面和无穷远表面进行。如通常一样，后一积分变成零，而在每一导体上，$\delta\varphi_0=$常数，于是

$$\oint \delta\varphi_0(\mathbf{D}-\mathfrak{E})d\mathbf{f}=\delta\varphi_0\oint(\mathbf{D}-\mathfrak{E})d\mathbf{f}.$$

但是，按照定义，場 $\mathfrak{E}$ 和感应强度为 $\mathbf{D}$ 的电場 $\mathbf{E}$ 是由同一源产生的（也就是由总电荷为 e 的同一导体所产生的）。因此，两个积分 $\oint D_n df$ 和 $\oint \mathfrak{E}_n df$ 都等于同一数值 $4\pi e$，而它們的差值等于零。

由相似的方式可以证明，(11.2) 式的第二項也等于零（为此，在第二項内代入 $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi$，并进行相同的变换）。最后得到

$$\delta\mathscr{F}=-\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{D}-\mathbf{E})\delta\mathfrak{E}dV=-\int\mathbf{P}\delta\mathfrak{E}dV. \qquad (11.3)$$

值得注意的是，在这个式子内，积分只对电介质所占据的体积进行，因为在物体外，$\mathbf{P}=0$。

但是应該着重指出，被积式 $\mathbf{P}\delta\mathfrak{E}$ 不能解釋为物体自由能密度的变化，如同对(10.3)式和(10.4)式所作的解釋一样。首先，这个“密度”在物体外也应存在，因为它的存在也使周圍空間内的場发生畸变。其次，十分显然，在物体任何一点处的能量密度，只能依賴于該点处实际存在的場，而与物体不存在时的場无关。

如果外电場 $\mathfrak{E}$ 是均匀的，則

$$\delta\mathscr{F}=-\delta\mathfrak{E}\int\mathbf{P}dV=-\mathscr{P}\delta\mathfrak{E}, \qquad (11.4)$$

式中 $\mathscr{P}$ 是物体的总电偶极矩。因此，在現在的情况下，自由能的热力学恒等式可以写为

$$d\mathscr{F}=-\mathscr{S}dT-\mathscr{P}d\mathfrak{E}. \qquad (11.5)$$

所以，对总自由能取微分，就得到物体的总电偶极矩：

$$\mathscr{D}=-\left(\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\mathfrak{E}}\right)_T. \tag{11.6}$$

我們注意到，上面的式子也可以从普通的統計力学公式：

$$\overline{\frac{\partial\hat{\mathscr{H}}}{\partial\lambda}}=\left(\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\lambda}\right)_T$$

直接得到，式中 $\hat{\mathscr{H}}$ 是組成物体的粒子系統的哈密頓函数，而 λ 是描写物体外界条件的某一参量①。在均匀外电場 $\mathfrak{E}$ 內的物体，哈密頓函数包含 $-\mathfrak{E}\hat{\mathscr{D}}$ 的一項，其中 $\hat{\mathscr{D}}$ 是偶极矩的算符，选擇 $\mathfrak{E}$ 作为参量 λ，我們就得到所求的公式。

如果 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 的关系是綫性的，即 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$，那末由相似的方式，不但可以显式地算出变化 $\delta\mathscr{F}$，而且也可以算出 $\mathscr{F}$ 本身。于是我們得到

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0=\int\frac{\mathbf{ED}-\mathfrak{E}^2}{8\pi}dV.$$

这个式子恒可以改写成下面的形式：

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0=\frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}+\mathfrak{E})(\mathbf{D}-\mathfrak{E})dV-\frac{1}{8\pi}\int\mathfrak{E}(\mathbf{D}-\mathbf{E})dV.$$

令等式右边第一項內的 $\mathbf{E}+\mathfrak{E}=-\operatorname{grad}(\varphi+\varphi_0)$，并进行和上面完全相同的变换，可以证明，等式右边第一項等于零。因此，我們得到

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0(V,T)=-\int\frac{\mathfrak{E}\mathbf{P}}{2}dV. \tag{11.7}$$

特别是在均匀的外电場內，

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0(V,T)=-\frac{1}{2}\mathfrak{E}\mathscr{D}. \tag{11.8}$$

对关系式(11.3)直接进行积分，也可以得到上面的等式，只要注意到，由于全部場方程是綫性的(当 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$)，因而电偶极矩 $\mathscr{D}$

---

① 参閱"統計物理学"第三版，§§11, 15。

也必须是 $\mathfrak{E}$ 的綫性函数。

$\mathscr{P}$ 和 $\mathfrak{E}$ 的分量間的綫性关系，可以写成下面的形式:

$$\mathscr{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k, \tag{11.9}$$

如同我們对导体所进行过的一样（§2)。但是，与导体不同的是，介电物体的“极化率”不但与它的形状有关，而且也与它的介电常数有关。从关系式(11.6)可以直接得出張量 α_{ik} 的对称性（§2 中已提到过的)；只要注意到二阶导数

$$\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\mathfrak{E}_k\partial\mathfrak{E}_i} = -\frac{\partial\mathscr{P}_i}{\partial\mathfrak{E}_k} = -V\alpha_{ik}$$

和取微分的順序无关。

(11.7)式还可以在一种重要的情况下进一步簡化，即当 ε 近于1，也就是介电常数 $\varkappa=(\varepsilon-1)/4\pi$ 很小。在这种情况下，計算能量时可以略去由介电体的出現所引起的場畸变，即可令

$$\mathbf{P} = \kappa\mathbf{E} \cong \kappa\mathfrak{E}.$$

于是

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = -\frac{\kappa}{2}\int\mathfrak{E}^2 dV, \tag{11.10}$$

式中积分对介电物体的体积进行。在均匀电場内，偶极矩 $\mathscr{P} = V\kappa\mathfrak{E}$，而自由能为

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = -\frac{\kappa V}{2}\mathfrak{E}^2. \tag{11.11}$$

在 D 对 E 为任意关系的普遍情况下，不能得到(11.7)和(11.8)的簡单式子。于是，为了算出$\mathscr{F}$，可利用下面的公式:

$$\mathscr{F} = \int\left(F - \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\right)dV = \int\left(F - \frac{\mathbf{ED}}{8\pi} - \frac{1}{2}\mathbf{P}\mathfrak{E}\right)dV, \tag{11.12}$$

这个式子的推导，在进行了上面的計算以后，已很明显。在这里，被积式(在后一积分內的)在介电物体外变为零，于是只对介电物体的体积进行积分。

例　　题

如果物体不是在眞空內，而是在介电常数为$\varepsilon^{(e)}$的媒质內，試求代替(11.7)的公式。

解. 为此重复正文內的变换，我們得到

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0=-\frac{1}{8\pi}\int\mathfrak{E}(\mathbf{D}-\varepsilon^{(e)}\mathbf{E})dV.$$

§12. 各向同性电介质的电致伸縮

对于电場內的固体电介质，不能像对电場不存在时的各向同性物体那样，引入压强的概念，因为这时作用在物体上的力(将在§§15、16中求出这些力)沿物体而变化，因而是各向异性的，即使物体本身是各向同性的。要精确求出这种物体的形变（称为电致伸縮)，必須解彈性理論的复杂問題。

但是，如果我們只对物体的总体积变化感到兴趣，那末情况可以大为簡化。如在§5中指出的，在这种情况下，可以假定物体的形状不变，也就是把物体的形变看成是均匀的各向压縮或伸展。

我們将忽略物体周圍外部媒质(例如大气)的介电性质，也就是假定媒质的介电常数$\varepsilon=1$。媒质的作用只是在物体表面产生均匀的压强。下面我們用p表示这种外压强。如果$\mathscr{F}$是物体的总自由能，那末按照熟知的热力学关系式，

$$p=-\left(\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial V}\right)_T,$$

相应地，在$d\mathscr{F}$的微分式中必須加入一項$-pdV$。于是，在均匀的外电場內，代替(11.5)式，我們有

$$d\mathscr{F}=-\mathscr{S}dT-pdV-\mathscr{P}d\mathfrak{E}.$$

按照通常的热力学定义，引入物体的总热力学勢：

$$\Phi=\mathscr{F}+pV. \tag{12.1}$$

对这个量求微分(在均匀外电場内),得到关系式:

$$d\mathscr{P}=-\mathscr{S}dT+Vdp-\mathscr{D}d\mathfrak{E}. \tag{12.2}$$

热力学量在外电場内的改变通常是一个非常微小的数值。大家知道①,自由能的微小变化(T和V保持給定)和热力学势的微小变化(T和p保持給定)彼此相等。因此,除了(11.8)式,对于均匀外电場内的物体的热力学势,我們可以写出类似的关系式:

$$\mathscr{P}=\mathscr{P}_0-\frac{1}{2}\mathfrak{E}\mathscr{D}, \tag{12.3}$$

式中$\mathscr{P}_0$是指p,T保持給定和电場不存在时的物体而言[而(11.8)式的$\mathscr{F}_0$是V和T保持給定值和电場不存在时的物体的自由能]。

按照(11.9)式,将偶极矩对V和$\mathfrak{E}$的关系表为显式形式,于是我們可以把(12.3)改写成:

$$\mathscr{P}=\mathscr{P}_0(p,T)-\frac{1}{2}V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k, \tag{12.4}$$

按照場不存在时的物体的状态方程,改正項必須表示为溫度和压强的函数。特别是在物质的介电常数很小的情况下,这个式子可以簡化为

$$\mathscr{P}=\mathscr{P}_0(p,T)-\frac{\kappa V}{2}\mathfrak{E}^2 \tag{12.5}$$

(参看(11.11)式)。

現在直接将$\mathscr{P}$对压强求微分(T和$\mathfrak{E}$保持不变),就得到所求的外电場内的体积变化:$V-V_0$。例如,从(12.5)式,我們得到

$$V-V_0=-\frac{\mathfrak{E}^2}{2}\left(\frac{\partial(\kappa V)}{\partial p}\right)_T, \tag{12.6}$$

这个量可以是正的,也可以是負的(与导体的电致伸縮相反,导体的体积在电場内总是增加的)。

用类似方式,还可以算出等溫地加上外电場时电介质所吸收

① 参閱"統計物理学"第三版,§15,1951年。

的热量 Q(同时外压强保持不变)①。

将 $\mathscr{P}-\mathscr{P}_0$ 对温度求微分，給出物体的熵变化，再乘上 T 后，就得到所求的热量。例如，从(12.5)式，得到

$$Q=\frac{\mathfrak{E}^2T}{2}\left(\frac{\partial(\kappa V)}{\partial T}\right)_p, \tag{12.7}$$

Q 为正值相应于吸收热量。

例　　題

1. 試求均匀电場内介电椭球的体积变化和电热效应，設电場方向与椭球的一軸平行。

解. 按照公式(12.3)和(8.9)，我們有

$$\mathscr{P}=\mathscr{P}_0-\frac{V}{8\pi}\frac{\varepsilon-1}{n\varepsilon+1-n}\mathfrak{E}^2.$$

于是我們求得体积变化为

$$\frac{V-V_0}{V}=\frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon-1}{n\varepsilon+1-n}\frac{1}{K}-\frac{1}{(n\varepsilon+1-n)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_T\right],$$

而电热效应为

$$Q=\frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon-1}{n\varepsilon+1-n}\alpha+\frac{1}{(n\varepsilon+1-n)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_p\right],$$

式中 $\frac{1}{K}=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ 为物体的压縮系数，而 $\alpha=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ 为热膨脹系数。

特别是对垂直于电場的平行平面板，$n=1$，于是

$$\frac{V-V_0}{V}=\frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\frac{1}{K}-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_T\right],$$

$$Q=\frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\alpha+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_p\right].$$

对纵向場内的平行平面板(或任何柱体)，$n=0$，于是

$$\frac{V-V_0}{V}=\frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{(\varepsilon-1)}{K}-\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_T\right],$$

① 如果物体是被热絕緣的，那末加上电場后引起温度改变，这改变等于 $\Delta T=-\frac{Q}{C_p}$，式中 C_p 是压强 p 不变时物体的热容量。

$$Q=\frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[(\varepsilon-1)\alpha+\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_p\right].$$

2. 設有平行平面板垂直于电場，試求两板間的电势差保持不变时的热容量$\mathscr{C}_\varphi$与感应强度保持不变时的热容量$\mathscr{C}_D$之差，在两种情况下，外压强都保持不变①。

解. 根据例題1的結果，平行平面板的熵为

$$\mathscr{S}=-\left(\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial T}\right)_{p,\mathfrak{E}}$$

$$=\mathscr{S}_0(p,T)+\frac{V\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\alpha+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_p\right].$$

板內的場感应强度和外电場相等：$D=\mathfrak{E}$。因此，要計算热容量$\mathscr{C}_D$，必須保持$\mathfrak{E}$不变而对$\mathscr{S}$求微分。平行平面板两面間的电势差为$\varphi=El=\frac{\mathfrak{E}l}{\varepsilon}$，其中$l$是板的厚度。当物体受到均匀压縮或均匀膨脹时，$l$与$V^{\frac{1}{3}}$成比例地改变。因此，要計算热容量$\mathscr{C}_\varphi$，必須保持乘积$\frac{\mathfrak{E}V^{\frac{1}{3}}}{\varepsilon}$不变而对$\mathscr{S}$求微分。于是求得热容量之差为

$$\mathscr{C}_\varphi-\mathscr{C}_D=\frac{TV\mathfrak{E}^2}{4\pi\varepsilon}\left[(\varepsilon-1)\alpha+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_p\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_p-\frac{\alpha}{3}\right].$$

3. 試求均匀电介质內的电热效应，电介质的总体积保持不变。

解. 严格說来，在加上外电場后，物体的密度发生变化(沿物体变成不均匀的)，即使物体的总体积保持不变。但是在計算总熵的变化时可以忽略这种情况，而把物体每一点处的密度ρ看成不变②。

按照(10.17)式，物体的总熵为

$$\mathscr{S}=\mathscr{S}_0(\rho,T)+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho\int E^2dV,$$

① $\mathscr{C}_\varphi$是平面电容器两板間的薄板的热容量，电容器接在有恒定电动势的电路內。在开路的电容器內，两板上的电荷不变，于是薄板的热容量为$\mathscr{C}_D$。

② 密度变化$\delta\rho$是电場的二次量($\sim E^2$)，而場引起的总熵变化是四次量。实际上，总熵的綫性变化(对$\delta\rho$来說)是$\frac{\delta S_0}{\partial\rho}\int\delta\rho dV$，但由于物体的总质量不变，积分

$$\int\delta\rho dV=0$$

式中的积分对物体的全部体积进行。吸收的热量为

$$Q=\frac{T}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_p\int E^2dV.$$

4. 試求平行平面板的总体积不变时的$\mathscr{C}_\varphi-\mathscr{C}_D$之差(参看例題 2)。

解. 若板的总体积(因而厚度)不变,則电势差不变时的微分等价于电場强度 E 不变时的微分。利用例題 3 所求得的熵的公式,我們得到

$$\mathscr{C}_E-\mathscr{C}_D=\frac{TVE^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_p^2.$$

5. 設电容器由相距 h 的两导电面构成, h 小于电容器板的綫度;电容器两板間的空間內充滿介电常数为 ε_1 的物质。設在电容器內放入半徑为 $a\ll h$、介电常数为 ε_2 的小球。試求电容器电容的改变。

解. 設小球放入电容器后,电容器两板間的电势差 φ 仍保持不变。当导体的电势不变时,$\tilde{\mathscr{F}}$起着自由能的作用。在沒有小球时,$\tilde{\mathscr{F}}=-\frac{C_0\varphi^2}{2}$,其中 C_0 是电容器原来的电容。由于小球的体积很小,可以假定小球系放在强度为 $\mathfrak{E}=\frac{\varphi}{h}$ 的均匀电場內,而$\tilde{\mathscr{F}}$的改变很小。当电势不变时$\tilde{\mathscr{F}}$的微小变化等于場源的电荷不变时$\tilde{\mathscr{F}}$的微小变化。利用 § 11 內例題中所得到的公式和 (8.2) 式,我們得到

$$\tilde{\mathscr{F}}=-\frac{C_0\varphi^2}{2}-\frac{a^3}{2}\frac{\varepsilon^{(e)}(\varepsilon^{(i)}-\varepsilon^{(e)})}{2\varepsilon^{(e)}+\varepsilon^{(i)}}\frac{\varphi^2}{h^2},$$

由此求得电容为

$$C=C_0+\frac{a^3}{h^2}\frac{\varepsilon^{(e)}(\varepsilon^{(i)}-\varepsilon^{(e)})}{2\varepsilon^{(e)}+\varepsilon^{(i)}}.$$

§ 13. 晶体的介电性质

在各向异性的介电媒质(单晶体)內,感应强度和电場强度之間的綫性关系具有更复杂的形式,这时不能化为簡单的比例关系。

这种相依关系的最普遍形式,由下列表达式給出:

$$D_i=D_{0i}+\varepsilon_{ik}E_k, \tag{13.1}$$

式中 $\mathbf{D}_0$ 是恒定矢量,而全部的 ε_{ik} 量构成一个二秩張量——介电常数張量(或者更簡单地說,介电張量)。但是关系式(13.1)內的

自由項D_0并不是在任何晶体內都存在。大多数的晶軸对称类型不容許存在恒定矢量(参閱下面)，于是簡单地有

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k. \tag{13.2}$$

張量ε_{ik}是对称的:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}. \tag{13.3}$$

要证明这一点，只要利用热力学关系式(10.10)就足够了，并注意到二阶导数

$$-4\pi \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial E_k \partial E_i} = \frac{\partial D_i}{\partial E_k} = \varepsilon_{ik}$$

和求微分的次序无关。

对于量$\widetilde{F}$本身，我們得到表达式(在满足(13.2)式下)为

$$\widetilde{F} = F_0 - \frac{\varepsilon_{ik} E_i E_k}{8\pi}. \tag{13.4}$$

自由能F等于

$$F = \widetilde{F} + \frac{E_i D_i}{4\pi} = F_0 + \frac{\varepsilon^{-1}_{ik} D_i D_k}{8\pi}. \tag{13.5}$$

和任何二秩的对称張量一样，由适当选擇坐标軸，可以把張量ε_{ik}化成对角綫形式。因此，在普遍情况下，張量ε_{ik}由三个独立量，即三个主値$\varepsilon^{(1)}$、$\varepsilon^{(2)}$、$\varepsilon^{(3)}$决定。这些量永远大于1，如同在各向同性的物体中$\varepsilon > 1$一样(参閱 § 14)。

根据晶体对称性的不同，張量ε_{ik}的主値数目也可以小于三个①。

在三斜系、单斜系和菱形系的晶体中，这三个主値各不相同。这种晶体称为**双軸晶体**②。这时，在三斜系晶体內，張量ε_{ik}的主

① 利用張量代数中一个熟知的結果，即任何二秩的对称張量相应于一个所謂"張量橢球"(其半軸长度与張量主値成比例)，于是我們可以特别簡单地得到下面所描述的張量ε_{ik}的明显的对称性质。这时橢球的对称性必須相应于晶体的对称性。

② 这个名詞和晶体的光学性质有关——参閱 §§ 78, 79。

軸方向和任何結晶学方向的关系都不是单值的。在单斜系晶体內，有一个主軸的方向是預先規定的，即它必須和二次的对称軸相合或者垂直于晶体的对称平面。在菱形系晶体內，張量 ε_{ik} 的三个主軸在晶向上都是固定的。

其次，在正方系、菱面系和六角形系晶体內，三个主值中有二个相等，于是总共只有两个独立量，这样的晶体称为单軸晶体。这时主軸中有一个主軸和四次、三次或六次的对称晶軸相合，而其他两个主軸方向可以任意选擇①。

最后，在立方系晶体內，張量 ε_{ik} 的三个主值相同，而主軸方向完全是任意的②。这表明，張量 ε_{ik} 的形式为 $\varepsilon\delta_{ik}$，也就是由一个标量 ε 来决定。換句話說，就介电性质来說，立方对称晶体和各向同性物体沒有差別。

现在我們討論(13.1)式中 $\mathbf{D}_0$ 項为常数的晶体的介电性质的特征。这一項的存在表明，电介质在沒有外加电場时也会自发地极化；这种晶体称为热电晶体。但是，这种自发极化的数值实际上常常是很小的（与分子場比較），这一情况是由于大的 $\mathbf{D}_0$ 值将导致晶体內存在强电場，而这在能量上說是很不利的，因而和热力学平衡不相对应。$\mathbf{D}_0$ 很小时同时也保证了将 $\mathbf{D}$ 展开为 $\mathbf{E}$ 的冪級数的合理性，而展开式的头二項也就是(13.1)式。

对关系式

$$-4\pi\frac{\partial\tilde{F}}{\partial E_i}=D_i=D_{0i}+\varepsilon_{ik}E_k$$

进行积分，可以求得热电晶体的热力学量。由此得到

① 張量橢球在这种情况下退化为迴轉橢球，它对横軸是完全对称的。应該着重指出，对于由二秩对称張量决定的晶体的物理性质，三次对称軸的存在，等效于垂直于这軸的平面內的完全各向同性。

② 在这里張量橢球退化为球。

$$\widetilde{F}=F_0-\frac{\varepsilon_{ik}E_iE_k}{8\pi}-\frac{1}{4\pi}E_iD_{0i}, \tag{13.6}$$

于是自由能为

$$F=\widetilde{F}+\frac{E_iD_i}{4\pi}=F_0+\frac{\varepsilon_{ik}E_iE_k}{8\pi}=$$

$$=F_0+\frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}^{-1}(D_i-D_{0i})(D_k-D_{0k}). \tag{13.7}$$

应注意的是，$\widetilde{F}$ 内的 E_i 的綫性項已从 F 内消去①。

将(13.7)和(13.1)式代入(11.12)式，可以求得热电体的总自由能。在沒有外加电場的情况下，$\mathfrak{E}=0$，于是得到簡单的結果为

$$F=\int\left(F_0-\frac{\mathbf{E}\mathbf{D}_0}{8\pi}\right)dV. \tag{13.8}$$

値得注意的是，沒有外加电場时，热电体的自由能（和电場 $\mathbf{E}$ 一样），不但依賴于它的体积，而且也依賴于它的形状。

如上面所指出的，并不是晶体的任何对称性都有热电現象。因为在任何对称变换中，晶体的全部性质必須保持不变，因此，十分显然，只有晶体內有一个方向在所有对称变换中都保持不变（其中也包括不改变为反方向）的晶体，才是热电晶体；在这方向上有一个恒定矢量 $\mathbf{D}_0$。

只有由一个軸和通过該軸的对称平面所組成的对称群才滿足这一条件。特別是具有对称中心的晶体，明显地不可能是热电体。我們現在从 32 种晶类中，列举出那些存在热电性质的晶类：

三斜系：C_1，

单斜系：C_s, C_2，

菱形系：C_{2v}，

---

① 应該指出，在这些式子中，我們实际上略去了压电效应（也就是內应力对物体电性的影响参閱 § 17），因此，严格說来，这些公式只能应用于物体內不存在应力并且物体的全部体积內电場为均匀的情况）。

正方系: C_4, C_{4v},

菱面系: C_3, C_{3v},

六角系: C_6, C_{6v}。

在立方系中,不言而喻,一般不存在热电晶体。在 C_1 类晶体中,热电矢量 $\mathbf{D}_0$ 的方向和任何固定的晶向无关,而在 C_s 类的晶体中,热电矢量 $\mathbf{D}_0$ 的方向必須在对称平面內。在上面所列举的其余晶类中,$\mathbf{D}_0$ 的方向和对称軸的方向重合。

应該指出,在通常的条件下,热电晶体沒有总电偶极矩,虽然晶体中的极化并不等于零。問題在于在自发极化的电介质內有不为零的电場强度 $\mathbf{E}$。实际上,晶体样品通常都具有某种很小但不为零的电导率,由于这一原因,电場的存在将引起电流,这种电流一直維持到晶体面上生成的自由电荷使晶体样品內的电場消失为止。在該方向上有从空气中淀积在样品表面的离子。实驗上,对晶体进行加热以使晶体的自发极化数值发生变化,并且能观察到这种变化时,我們就能观察到晶体的热电性质。

例 題

1. 試求热电球体在眞空內所产生的电場。

解. 在球內存在均匀电場,电場强度和感应强度的关系为 $2\mathbf{E}=-\mathbf{D}$ [如同从(8.1)式当 $\mathfrak{E}=0$,即沒有外加电場时所得到的一样]。把这关系代入(13.1)式,我們得到方程:

$$2E_i+\varepsilon_{ik}E_k=-D_{0i}.$$

选擇坐标軸为張量 ε_{ik} 的主軸。于是从这式子得到

$$E_i=-\frac{D_{0i}}{2+\varepsilon^{(i)}}.$$

球的极化为

$$P_i=\frac{D_i-E_i}{4\pi}=\frac{3D_{0i}}{4\pi(2+\varepsilon^{(i)})}.$$

球外的場为电矩为 $\mathscr{P}=\mathbf{P}V$ 的电偶极子所产生的場。

2. 試求各向异性的均匀媒质內点电荷所产生的場[①]。

解. 描写点电荷电場的方程为 $\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi e\delta(\mathbf{r})$（点电荷在坐标原点处）。在各向异性媒质內，$D_i=\varepsilon_{ik}E_k=\varepsilon_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$; 选擇張量 ε_{ik} 的主軸为 x, y, z 軸，于是得到电势方程为

$$\varepsilon^{(x)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\varepsilon^{(y)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\varepsilon^{(z)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=$$
$$=-4\pi e\delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

按照下式引进新变数:

$$x=x'\sqrt{\varepsilon^{(x)}},\quad y=y'\sqrt{\varepsilon^{(y)}},\quad z=z'\sqrt{\varepsilon^{(z)}}. \tag{1}$$

于是电势方程变为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2}=$$
$$=-\frac{4\pi e}{\sqrt{\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}}}\delta(x')\delta(y')\delta(z'),$$

它在形式上和眞空內的場方程的区别只是用 $\frac{e}{\sqrt{\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}}}$ 代替了 e。因此，

$$\varphi=\frac{e'}{r'}=\frac{e}{\sqrt{\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}}}\left[\frac{x^2}{\varepsilon^{(x)}}+\frac{y^2}{\varepsilon^{(y)}}+\frac{z^2}{\varepsilon^{(z)}}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

采用張量符号，不依賴于坐标系的选擇，我們有

$$\varphi=\frac{e}{\sqrt{|\varepsilon|\varepsilon^{-1}_{ik}x_ix_k}},$$

式中 $|\varepsilon|$ 是張量 ε_{ik} 的行列式。

3. 試求各向异性的介电媒质內导电球（半徑为 a）的电容。

解. 利用前題內所指出的变換，求出电荷为 e 的导体球在各向异性媒质內所产生的电場，归結为求出分布于椭球面上的电荷 e' 在眞空內所产生的电場:

$$\varepsilon_{ik}x'_ix'_k=\varepsilon^{(x)}x'^2+\varepsilon^{(y)}y'^2+\varepsilon^{(z)}z'^2=a^2.$$

利用椭球的場势公式(4.14)，求得所求的电容为

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}}}\int_0^\infty\left[\left(\xi+\frac{a^2}{\varepsilon^{(x)}}\right)\left(\xi+\frac{a^2}{\varepsilon^{(y)}}\right)\left(\xi+\frac{a^2}{\varepsilon^{(z)}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}d\xi.$$

① 在2—5題中，假定各向异性的介电媒质不是热电性质的。

4. 試求均匀外电場 $\mathfrak{E}$ 內的各向异性平行平面板內的电場。

解. 从电場强度切向分量的連續性条件得出

$$\mathbf{E}=\mathfrak{E}+A\mathbf{n},$$

式中 $\mathbf{E}$ 是板內的均匀电場强度, $\mathbf{n}$ 是与板面垂直的单位矢量, 而 A 是常数。后者由感应强度的法向分量为連續的条件求出: $\mathbf{nD}=\mathbf{n}\mathfrak{E}$, 或 $n_i\varepsilon_{ik}E_k=n_i\varepsilon_{ik}\mathfrak{E}_k+A\varepsilon_{ik}n_in_k=\mathfrak{E}_in_i$, 由此得到

$$A=-\frac{(\varepsilon_{ik}-\delta_{ik})n_i\mathfrak{E}_k}{\varepsilon_{lm}n_ln_m}.$$

5. 試求均匀外电場 $\mathfrak{E}$ 內(眞空內)的各向异性介电球所受到的力矩。

解. 按照(8.2)式, 得到球內的电場强度为

$$E_x=\frac{3}{\varepsilon^{(x)}+2}\mathfrak{E}_x$$

(E_y、E_z 有相似的式子), 同时选擇張量 ε_{ik} 的主軸为 x, y, z 軸。由此得到球(半徑 a)的偶极矩分量为

$$\mathscr{P}_x=\frac{4\pi}{3}a^3P_x=\frac{\varepsilon^{(x)}-1}{\varepsilon^{(x)}+2}a^3\mathfrak{E}_x.$$

于是, 作用于球上的力矩的分量为

$$K_z=[\mathscr{P}\mathfrak{E}]_z=3a^3\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\frac{\varepsilon^{(x)}-\varepsilon^{(y)}}{(\varepsilon^{(x)}+2)(\varepsilon^{(y)}+2)},$$

K_x 和 K_y 有相似的式子。

6. 設在无限的各向异性媒质內有一球形空腔。試用媒质內离球腔很远处的均匀电場 $E^{(e)}$ 表示出球腔內的电場。

解. 由例題 2 內的变换式(1), 媒质內的場势方程可以化为眞空內电場的拉普拉斯方程。相反地, 球腔內的場势方程可以化为介电常数为 $\frac{1}{\varepsilon^{(x)}}$, $\frac{1}{\varepsilon^{(y)}}$, $\frac{1}{\varepsilon^{(z)}}$ 的媒质內的場势方程。此外, 球(半徑 a)变成半軸为 $\frac{a}{\sqrt{\varepsilon^{(x)}}}$, $\frac{a}{\sqrt{\varepsilon^{(y)}}}$, $\frac{a}{\sqrt{\varepsilon^{(z)}}}$ 的椭球。設 $n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$ 为椭球的退极化系数[从(4.25)式得出]。將(8.7)式应用到这椭球的場上, 我們得到关系式为

$$(1-n^{(x)})\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial x'}+\frac{n^{(x)}}{\varepsilon^{(x)}}\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial x'}=\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial x'}$$

(在 y' 和 z' 軸上有相似的关系式)。現在化回到原来的坐标, 得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sqrt{\varepsilon^{(x)}}=E_x\sqrt{\varepsilon^{(x)}},$$

于是，对于球腔內的場，最后得到

$$E_x^{(i)}=\frac{\varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(x)}-n^{(x)}(\varepsilon^{(x)}-1)}E_x^{(e)}.$$

§ 14. 介电常数的正値性

为了闡明电場內电介质的热力学量对介电常数的依賴关系，我們現在来研究一个形式問題，就是当 ε 发生无穷小变化时，物体总自由能內的电能部分如何变化。

对于各向同性的电介质（但不一定是均匀的），按照 (10.19) 式，有

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0=\int\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}dV.$$

当 ε 变化时，电場感应强度也发生变化。因此，所研究的自由能的变化等于

$$\delta\mathscr{F}=\int\frac{\mathbf{D}\delta\mathbf{D}}{4\pi\varepsilon}dV-\int\frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}\delta\varepsilon dV=$$

$$=\int\frac{\mathbf{E}\delta\mathbf{D}}{4\pi}dV-\int\frac{E^2}{8\pi}\delta\varepsilon dV.$$

等式右边第一項，和場源（导体的电荷）发生无穷小变化时所完成的功的表达式(10.2)相同。但是，在現在的情况下，我們所研究的是場源不变时的場变化；因此，这一項变为零，于是我們得到

$$\delta\mathscr{F}=-\int\delta\varepsilon\frac{E^2}{8\pi}dV. \tag{14.1}$$

从这个公式首先可得出下面一个重要結果：媒质的介电常数的任何增加，即使只在媒质的某一部分內（場源保持不变），也会使媒质的总自由能减小。特别是可以断言，未带电的导体移到介电媒质內时，自由能总是減少，因为可以把导体看作（在靜电学中）ε

为无限大的物体。这种論断推广了§2中所提出的一个定理：将不带电的导体移到真空内时，使真空内的静电場能量减小。

另一方面，利用(14.1)式，可以证明§7所提到的一种情况，即任何物体的介电常数都大于1（也就是电极化率$\frac{\varepsilon-1}{4\pi}$是正的）。为此，必須首先单独证明：当介电物体移到电場內时，介电物体的自由能的总变化为負值[①]。这利用热力学的扰动理論就能证明，只要把物体自由能的变化看成是它的量子能級受到电場扰动的結果。按照这一理論，我們得到[②]

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0=\overline{V}_{nn}-\frac{1}{2}\sum_n\sum_m{}'\frac{|V_{nm}|^2(w_m-w_n)}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}-$$
$$-\frac{1}{2kT}\overline{(V_{nn}-\overline{V}_{nn})^2}. \qquad (14.2)$$

式中$E_n^{(0)}$是未受扰动的能級，V_{mn}是扰动能的矩陣元，而短划表示用吉布斯分布

$$w_n=\exp\left\{\frac{\mathscr{F}_0-E_n^{(0)}}{kT}\right\}$$

所得到的統計平均值。

(14.2)式內的$\overline{V}_{nn}$項是場的綫性項，只在热电体內才不为零。但我們所感兴趣的是对場为二次的自由能变化，它由(14.2)式中其余的項得出。从这里所写出的形式可以明显地看出：它們是負的。

如果将自由能的变化形式地看作是物体的介电常数逐漸地从1变化至ε值的結果，那末从(14.1)式得出，只当$\varepsilon>1$时，$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0$

① 所指的变化与場的平方成正比。但是要記住的是，在热电体内，自由能的变化也包含場的綫性項，但在这里我們对这一項不感兴趣。

② 参閱“統計物理学”第三版，§32，公式(32.5)和(32.6)；上面写出的公式和这些式子的区别只是写法不同。

才是負的，由此就证明了所作的論断。

由同样的方式可以证明，对各向异性的介电媒质的張量 ε_{ik} 的主值，有不等式 $\varepsilon^{(i)}>1$。为此，十分明显，只要研究三个主軸中每一主軸上的場能就够了。

特別是，把某一电荷从无穷远处移到介电物体附近时，使总自由能减少（这可以看成在电荷周圍的电場的某一区域內 ε 增加）。为了由此得出結論：任何电荷都被吸向电介质，严格地說来，我們还必須认为：在电荷与电介质間的有限距离內，F 不能达到极小值。我們在这里不去詳細证明这一論断，因为在电荷和电介质之間所出現的吸力，可以极其明显地看成是这电荷与由电荷所引起的极化电介质的偶极距相互作用的結果。

从(14.1)式可以直接得出，在准均匀电場內（也即是在物体的全部体积內可視为不变的电場內）介电物体的运动方向。在这种情况下，E^2 可以从积分号下移出来，而差值 $\mathscr{F}-\mathscr{F}_0$ 为負值，并与 E^2 成正比。因而，当介电物体趋向于占据自由能为极小值的位置时，物体向 E 增加的方向移动。

§15. 液态电介质內的电力

計算任意的不均匀电場內电介质上所受的力（有时称为有质动力）的問題，是相当复杂的，并且对液体（或气体）和固体，必須分别进行研究。我們首先来研究比較簡单的液体电介质的情况。

我們用 $\mathbf{f}dV$ 表示媒质的体积元 dV 所受的力；矢量 $\mathbf{f}$ 可以称为力的体密度。

大家知道，作用在物体某有限体积上的力，可以化为作用于該体积表面上的力①。这一情况是动量守恒定律的結果。体积 dV

① 参閱“連續介质力学”第二版，第二册，§2。

內的物质所受到的力是单位时間內它的动量变化 这动量变化必須等于相同时間內經过表面进入体积內的动量。如果用 $-\sigma_{ik}$ 表示动量流張量，则

$$\int f_i dV = \oint \sigma_{ik} df_k, \tag{15.1}$$

等式右边的积分对体积 V 的表面进行。張量 σ_{ik} 称为**应力張量**。显然地，

$$\sigma_{ik} df_k = \sigma_{ik} n_k df$$

是作用于面积元 df 上的力的 i 分量（$\mathbf{n}$ 是表面法綫方向的单位矢量，指向体积外）。

相似地，作用于該体积上的总力矩也可以化成面积分，由此就保证了动量守恒定律得到滿足。大家知道，这样作所以可能是因为应力張量的对称性（$\sigma_{ik}=\sigma_{ki}$）；由此可知，后者正是动量矩守恒定律的表达式。

把(15.1)式的面积分变换为体积分，我們得到

$$\int f_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV,$$

由于积分的体积是任意的，由此得到

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{15.2}$$

这是体积力用应力張量表示的熟知公式。

現在我們来計算应力張量。表面上的每一小段可以視为平面，而物体的性质及其附近的电場，也可以看成是均匀的。因此，为了使推导簡化，但并不限制其普遍性，我們来研究在任意方向的均匀电場內均匀物质（指成分、密度和溫度而言）的平行平面层（层厚 h）[1]。这个电場可以設想为由加在层面上具有相应电荷分布的

[1] 同时在应力張量內，我們拋去了与溫度陡度、电場等有关的項。但是这些項比起未包含导数的項，无穷地小，如同在 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 的关系中出現的含有导数的項很小一样。

导电平面所产生的。

仿照計算力的普遍方法，我們使其中一个导电面(“上面的”)受到一无穷小的虚平行位移ξ, ξ的方向是任意的，不一定和法綫$\mathbf{n}$的方向相合。我們假定导体的电势(在导体每一点处)在位移过程中保持不变，而由位移所引起的电介质层的均匀形变是等温的。

表面单位面积上所受到平行平面层的作用力为$-\sigma_{ik}n_k$。在虚位移过程中，这个力所作的功为$-\sigma_{ik}n_k\xi_i$。另一方面，导体发生等温形变和电势不变时所作的功，等于$\int\widetilde{F}dV$的减小，或者等于层单位表面积上的$h\widetilde{F}$的减小。于是

$$\sigma_{ik}\xi_i n_k=\delta(h\widetilde{F})=h\delta\widetilde{F}+\widetilde{F}\delta h. \tag{15.3}$$

液体的热力学量只与它的密度有关（保持温度和电場强度一定）；不改变密度的形变(位移形变)不会影响热力学状态。因此，我們得到液体內的等温变化$\delta\widetilde{F}$为

$$\delta\widetilde{F}=\left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\mathbf{E}}\right)_{T,\rho}\delta\mathbf{E}+\left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},T}\delta\rho=$$
$$=-\frac{\mathbf{D}\delta\mathbf{E}}{4\pi}+\left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},T}\delta\rho. \tag{15.4}$$

物质层的密度变化与其厚度变化的关系式为$\delta\rho=-\rho\frac{\delta h}{h}$. 場的变化可計算如下。

設在位移时，有$(\mathbf{r}-\mathbf{u})$点的物质落在空間(半徑矢量为$\mathbf{r}$)的某一点处，这里$\mathbf{u}$为层体积內的质点的位移矢量。因为在我們所研究的条件下(均匀形变和导电面的电势不变)，每一质点位移时都带有場势，因此，在空間的一給定点处場势的变化为

$$\delta\varphi=\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{u})-\varphi(\mathbf{r})=-\mathbf{u}\nabla\varphi=\mathbf{u}\mathbf{E},$$

式中$\mathbf{E}$为未形变层內的均匀电場。但是由于形变是均匀的，我們有

$$\mathbf{u}=\frac{z}{h}\boldsymbol{\xi},\tag{15.5}$$

式中 z 是至下面表面的距离。因此，电場强度的变化为

$$\delta\mathbf{E}=-\frac{1}{h}\mathbf{n}(\mathbf{E}\boldsymbol{\xi}).\tag{15.6}$$

把上面得到的全部式子代入(15.4)式，并考虑到$\delta h=\xi_z=\boldsymbol{\xi}\mathbf{n}$，我們得到

$$\sigma_{ik}\xi_i n_k=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{nD})(\boldsymbol{\xi}\mathbf{E})-(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})\rho\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho}+(\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})\widetilde{F}=$$
$$=\left\{\frac{E_iD_k}{4\pi}-\rho\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho}\delta_{ik}+\widetilde{F}\delta_{ik}\right\}\xi_i n_k.$$

由此最后得到应力張量的表达式为

$$\sigma_{ik}=\left[\widetilde{F}-\rho\left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho}\right)_{E,T}\right]\delta_{ik}+\frac{E_iD_k}{4\pi}.\tag{15.7}$$

在各向同性媒质內(即本节研究的情况)，$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$ 的方向相合。因此，$E_iD_k=E_kD_i$，張量(15.7)是对称的，这正是当然的。

在 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ 的綫性关系下，我們有

$$\widetilde{F}=F_0(\rho,T)-\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\tag{15.8}$$

[参看(10.16)]。F_0 是电場不存在时物质单位体积內的自由能。按照熟知的热力学关系式，一克物质的自由能对体积度的导数等于压强：

$$\left(\frac{\partial\frac{F_0}{\rho}}{\partial\frac{1}{\rho}}\right)_T=F_0-\rho\left(\frac{\partial F_0}{\partial\rho}\right)_T=-p_0;$$

$p_0=p_0(\rho,\ T)$是 ρ 和 T 值保持給定值和电場不存在时媒质內的压强。因此，把(15.8)式代入(15.7)式后，我們得到

$$\sigma_{ik}=-p_0(\rho,T)\delta_{ik}-\frac{E^2}{8\pi}\left[\varepsilon-\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right]\delta_{ik}+\frac{\varepsilon E_iE_k}{4\pi}.\tag{15.9}$$

在眞空內，这个式子变成大家所熟知的电場的麦克斯韦应力張

量[1]:

$$\sigma_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(E_iE_k-\frac{E^2}{2}\delta_{ik}\right).$$

两种互相接触的不同媒质作用于分界面上的力，必須大小相等，方向相反，即$\sigma_{ik}n_k=-\sigma'_{ik}n'_k$，式中带撇的量和不带撇的量，分别屬于两种媒质。法向矢量$\mathbf{n}$和$\mathbf{n}'$的方向相反，于是可以写成

$$\sigma_{ik}n_k=\sigma'_{ik}n'_k. \tag{15.10}$$

在两种各向同性媒质的交界面上，力的切向分量相等的条件恒被滿足。实际上，把(15.7)式代入(15.10)式，并取出切向分量，我們得到

$$\mathbf{E}_tD_n=\mathbf{E}'_tD'_n.$$

但是，由于$\mathbf{E}_t$和D_n为連續的边界条件，这个等式已被滿足。由力的法向分量相等的条件，可以得到加在两种媒质內的压强差上的非平庸条件。

例如，我們来研究液体和大气間的交界面(可以假定后者的$\varepsilon=1$)。我們用撇来标示大气中的量，并利用(15.9)式的σ_{ik}，我們得到

$$-p_0(\rho,T)+\frac{E^2}{8\pi}\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T+\frac{\varepsilon}{8\pi}(E_n^2-E_t^2)=$$

$$=-p_{大气}+\frac{1}{8\pi}(E'^2_n-E'^2_t).$$

考虑到边界条件：$E_t=E'_t$，$D_n=\varepsilon E_n=D'_n=E'_n$，可以将上述等式写成

$$p_0(\rho,T)-p_{大气}=\frac{\rho E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T-$$

$$-\frac{\varepsilon-1}{8\pi}(\varepsilon E_n^2+E_t^2). \tag{15.11}$$

---

① 参閱"場論"，第二版，§32.

这个关系式必須理解为从液体內的电場强度来确定液面附近的液体密度 ρ 的式子。

現在我們来求出作用于介电媒质內的体积力，按照(15.2)式，对(15.9)式求微分，我們得到

$$f_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-p_0+\frac{E^2}{8\pi}\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T\right]-\frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}E^2+\frac{\partial}{\partial x_k}(E_iD_k)\right].$$

考虑到方程 $\operatorname{div}\mathbf{D}\equiv\frac{\partial D_k}{\partial x_k}=0$，最后一項括号內的表达式变为下列二項之和:

$$-\varepsilon E_k\frac{\partial E_k}{\partial x_i}+D_k\frac{\partial E_i}{\partial x_k}=-D_k\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i}-\frac{\partial E_i}{\partial x_k}\right),$$

但由于 $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$，这个式子变为零。于是得到

$$\mathbf{f}=-\operatorname{grad}p_0(\rho,T)+\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left[E^2\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T\right]-$$
$$-\frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon. \tag{15.12}$$

如果电介质內有体密度为 $\rho_{旁}$ 的旁电荷，那末，在 $\mathbf{f}$ 力上还必須加上一項 $\mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{D}/4\pi$，因为 $\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho_{旁}$，因而这一項等于

$$\rho_{旁}\mathbf{E}; \tag{15.13}$$

但是不能认为这一結果是不证自明的(参閱§16例題3)。

如在§7中所提到的，在气体中可假定 $\varepsilon-1$ 之差与密度成正比。于是 $\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}=\varepsilon-1$，而(15.12)式取更簡单的形式:

$$\mathbf{f}=-\nabla p_0+\frac{\varepsilon-1}{8\pi}\operatorname{grad}E^2. \tag{15.14}$$

无論是組分均匀的或非均匀的媒质，(15.12)式都适用。在非均匀媒质內，ε 不仅是 ρ 和 T 的函数，而且也是沿媒质而变化的混

合物濃度的函数。但在組分均匀的媒质內，ε 只是 ρ 和 T 的函数，而 gradε 可以展开为

$$\nabla\varepsilon=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho\nabla T+\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\nabla\rho.$$

于是(15.12)式取下列形式:

$$\mathbf{f}=-\nabla p_0(\rho,T)+\frac{\rho}{8\pi}\nabla\left[E^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right]-\frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho\nabla T. \tag{15.15}$$

如果物体內的溫度保持不变，那末第三项变为零，而在第一項內，可以用 $\rho\nabla\zeta_0$ 代替 ∇p_0(按照沒有电場时的熟知的化学势热力学恒等式: $\rho d\zeta_0=dp_0-S_0dT$)和

$$\mathbf{f}=-\rho\nabla\left[\zeta_0-\frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right] \tag{15.16}$$

但是，方括內的表达式不是別的，是电場內的物质的化学势 ζ[参閱(10.18)式]，于是 $\mathbf{f}=-\rho\nabla\zeta$。

特別是当溫度不变时，力学平衡条件 $\mathbf{f}=0$ 为

$$\zeta=\zeta_0-\frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T=\text{常数}, \tag{15.17}$$

这与普遍的热力学平衡条件符合一致①。这个条件通常可写为更簡单的形式。在电場作用下，媒质密度的变化与 E^2 成正比。因此，如果沒有电場时媒质的密度是均匀的，那末在存在电場的情况下，在(15.15)式后面的二項內，应令 $\rho=$常数；在上面假定綫性关系 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ 成立的公式內，計算 ρ 的变化超出了这些公式的精确度。于是，令(15.15)式的 $\mathbf{f}$ 等于零，当溫度不变时，得到平衡条件为

$$p_0(\rho,T)-\frac{\rho E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T=\text{常数}, \tag{15.18}$$

这个式子和(15.17)式的差别，是用 $\frac{p_0}{\rho}$ 代替了 ζ。

---

① 参閱“統計物理学”第三版，§26，1951。

§ 16. 固体内的电力

固体的介电性质不但随其密度的改变而改变(和液体一样)，而且也随着不改变密度的形变(位移)而改变。首先我們来研究沒有电場时为各向同性的物体。一般說来，物体的形变会破坏它的各向同性；因而它的介电性质也变成是各向异性的，于是标量介电常数 ε 必須用介电張量 ε_{ik} 来代替。

大家知道，描写弱形变物体的状态是利用形变張量：

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

式中 $\mathbf{u}(x、y、z)$ 为物体各点的位移矢量。由于这些量很小，因此在分量 ε_{ik} 的变化內，只要取 u_{ik} 的一次項就够了。与此相应，我們把形变物体的介电張量写成下面的形式：

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon_0\delta_{ik}+a_1u_{ik}+a_2u_{ll}\delta_{ik}. \tag{16.1}$$

式中 ε_0 为未形变物体的介电常数，而后面二項(含有两个标量常数 a_1 和 a_2)代表最普遍形式的二秩張量，这張量可以利用綫性方式由張量 u_{ik} 的分量組成。

現在来看一看，前一节所給出的推导必須作那些修正。因为在固体內 $\widetilde{F}$ 与形变張量的全部分量有关，因而代替(15.4)式，必須写为

$$\delta\widetilde{F}=-\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\delta\mathbf{E}+\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}\delta u_{ik}.$$

在所研究的虛位移情况下，矢量 $\mathbf{u}$ 由(15.5)式得出，于是形变張量为

$$u_{ik}=\frac{1}{2h}(\xi_i n_k+\xi_k n_i).$$

把上式代入 $\delta\widetilde{F}$ 內，并考虑到張量的对称性(因而也是导数 $\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}$ 的

对称性)，我們得到

$$\delta\tilde{F}=-\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\delta\mathbf{E}+\frac{\xi_i n_k}{h}\frac{\partial\tilde{F}}{\partial u_{ik}}. \tag{16.2}$$

現在，十分显然，对于应力張量，代替(15.7)式，我們得到表达式为①：

$$\sigma_{ik}=\tilde{F}\delta_{ik}+\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial u_{ik}}\right)_{T,\mathbf{E}}+\frac{E_iD_k}{4\pi}. \tag{16.3}$$

不論 D 对 E 的关系如何，(16.3)式都适用。对于非热电物体和非压电物体(其中 $D_i=\varepsilon_{ik}E_k$)，$\tilde{F}$ 由(13.4)式得出，于是我們得到所求的导数为

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial u_{ik}}=\frac{\partial F_0}{\partial u_{ik}}-\frac{1}{8\pi}(a_1E_iE_k+a_2E^2\delta_{ik}).$$

然后，在(16.3)式中，令 $\varepsilon_{ik}=\varepsilon^{(0)}\delta_{ik}$，因此求得应力張量的公式为

$$\sigma_{ik}=\sigma_{ik}^{(0)}+\frac{2\varepsilon_0-a_1}{8\pi}E_iE_k-\frac{\varepsilon_0+a_2}{8\pi}E^2\delta_{ik}. \tag{16.4}$$

$\sigma_{ik}^{(0)}$ 是沒有电場时的应力張量，按照彈性理論中的普通公式，它由剛性模量和压縮模量决定。

現在我們来对各向异性固体进行类似的計算②。这时应对上面的推論作如下的改变：当物质层发生虛形变时，它的晶軸也发生轉动，这样一来，晶軸相对于外电場的取向也发生改变。由于晶体的介电性质是各向异性的，因而导至 $\tilde{F}$ 有一附加的改变，而这在

① 在这公式內的量 $\tilde{F}$，和上面一样，是物体单位体积的自由能。但是，在彈性理論中，通常采用稍为不同的定义：热力学量是屬于未形变物体单位体积內的物质量的，而在形变以后，这物质可以占据另一体积。很容易从一定义过渡到另一定义，只要用張量 u_{ik} 来表示形变时的相对体积改变[由于(16.3)式內有 u_{ik} 的导数，必須精确到二次項]。結果(16.3)式的头两項变成一項：$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial u_{ik}}$，这与彈性理論的一般公式符合。

② 在§17中，我們将看到，晶体的电致伸縮現象，在一定的对称类型下，和各向同性物体的电致伸縮差別很大。这种晶体称为压电晶体。这里所指的是非压电晶体內的电致伸縮。

(16.2)式內沒有考慮在內。在計算这一改变时，不論假定晶軸相对于电場 **E** 旋轉了一角度 $\delta\boldsymbol{\varphi}$，还是假定电場相对于晶軸旋轉了一角度 $-\delta\boldsymbol{\varphi}$，都是一样的，但第二种方法更为方便。

由此可見，在我們前面所研究过的場变化(15.6)內，还必須加上轉动一角度 $-\delta\boldsymbol{\varphi}$ 时的电場 **E** 的变化：

$$\delta\mathbf{E} = -\frac{1}{h}\mathbf{n}(\mathbf{E}\boldsymbol{\xi}) - [\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{E}].$$

角 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 和形变时的位移矢量 **u** 的关系为 $\delta\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}$（我們注意到，在物体轉动 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 角时，它各点的位移为 $\mathbf{u} = [\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{r}]$，因而很容易地得到上面的等式）。把(15.5)式內的 **u** 代入，我們得到

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2h}[\nabla z\boldsymbol{\xi}] = \frac{1}{2h}[\mathbf{n}\boldsymbol{\xi}],$$

和

$$\delta\mathbf{E} = -\frac{1}{h}\mathbf{n}(\mathbf{E}\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2h}[\mathbf{E}[\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi}]] = -\frac{1}{2h}\{\mathbf{n}(\mathbf{E}\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{n}\mathbf{E})\}.$$

(16.2)式內的第一項变为

$$-\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\delta\mathbf{E} = \frac{1}{8\pi h}\{(\mathbf{n}\mathbf{D})(\boldsymbol{\xi}\mathbf{E}) + (\boldsymbol{\xi}\mathbf{D})(\mathbf{n}\mathbf{E})\}$$
$$= \frac{1}{4\pi h}\xi_i n_k\left(\frac{E_iD_k + E_kD_i}{2}\right).$$

由此可見，(16.3)式內的乘积 E_iD_k 必須用上式括号內的半和来代替：

$$\sigma_{ik} = \widetilde{F}\delta_{ik} + \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}} + \frac{1}{8\pi}(E_iD_k + E_kD_i). \tag{16.5}$$

我們注意到，所求得的式子自动地对下角标 i 和 k 是对称的，这正是应当的。

至于形变晶体的介电張量，代替含有两个标量常数的表达式(16.1)，在普遍情况下，我們有下列的表达式：

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ik}^{(0)}+a_{iklm}u_{lm}, \tag{16.6}$$

式中 a_{iklm} 为四秩的恒定張量，它对两对下角标 i, k 和 l, m 是对称的(但对两对下角标 i, k 和 l, m 的换位不对称)。这个張量的不为零的独立分量数目，取决于晶体的对称性，也即是取决于晶体的类型。

我們在这里不准备写出应力張量的公式[它与(16.4)式类似]，这利用(16.6)式即可得到。

由上面得到的公式，可以求出固体电介质內的应力。但是，如果我們只是希望求出外电場作用于物体上的总力 **F** 或总力矩 **K**，那末并不需要求出这些公式。現在我們来研究在液体(或气体)媒质內保持靜止的物体。作用于物体上的总力等于对物体表面所取的积分 $\oint\sigma_{ik}n_k df$。由于力 $\sigma_{ik}n_k$ 是連續的，因此，无論从(16.4)式的σ_{ik}值来計算这积分，或者按适用于物体周圍媒质的(15.9)式来計算这积分，結果都是一样。假定媒质处于力学和热平衡下，于是，如果考虑到平衡条件(15.18)式，則計算工作还可进一步簡化。由于这个条件，在应力張量(15.9)內有一部分表示媒质內的恒定均匀压縮或拉伸压强，它們对作用于物体上的总力 **F** 和总力矩 **K** 沒有貢献。因此計算后者时可以把 σ_{ik} 簡单地写成

$$\sigma_{ik}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E_iE_k-\frac{E^2}{2}\delta_{ik}\right), \tag{16.7}$$

式中 **E** 为液体內的电場，而 ε 是液体的介电常数。这个式子和眞空內电場的麦克斯韦应力張量不同的地方是多了一个因子 ε 而已。于是

$$\mathbf{F}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\left\{\mathbf{E}(\mathbf{nE})-\frac{1}{2}E^2\mathbf{n}\right\}df, \tag{16.8}$$

$$\mathbf{K}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\left\{[\mathbf{rE}](\mathbf{nE})-\frac{1}{2}E^2[\mathbf{rn}]\right\}df. \tag{16.9}$$

我們还注意到，因为液体处于平衡状态下，因此在这些公式內，可以对包圍待研究物体的任何封閉面进行积分(但是，当然不包括作为場源的带电体)。

我們也可以从另一角度来計算作用于电場內电介质上的总力問題(在眞空內)，也就是不采用实际存在的电場，而采用电介质不存在时給定場源所产生的电場 $\mathfrak{E}$ 来表示总力，这也就是物体被带入的"外电場"。此处假定了当物体带入电場时产生电場的电荷分布并不起变化。这一条件实际上不可能得到滿足，例如，如果电荷分布于伸长导体的表面和电介质被带至离导体有限距离的話。

当整个物体虛平移了一无穷小距离 $\mathbf{u}$ 时，物体的总自由能变化按照(11.3)式为

$$\delta\mathscr{F}=-\int\mathbf{P}\delta\mathfrak{E}dV,$$

式中

$$\delta\mathfrak{E}=\mathfrak{E}(\mathbf{r}+\mathbf{u})-\mathfrak{E}(\mathbf{r})=(\mathbf{u}\nabla)\mathfrak{E}$$

是物体某一給定点处場 $\mathfrak{E}$ 的变化。由于 $\mathbf{u}=$常数和 $\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}=0$，我們有

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}\nabla)\mathfrak{E}=(\mathbf{P}\nabla)(\mathbf{u}\mathfrak{E})=\mathbf{u}(\mathbf{P}\nabla)\mathfrak{E},$$

于是

$$\delta\mathscr{F}=-\mathbf{u}\int(\mathbf{P}\nabla)\mathfrak{E}dV.$$

另一方面，$\delta\mathscr{F}=-\mathbf{uF}$，于是我們得到所求的力的公式为[1]

$$\mathbf{F}=\int(\mathbf{P}\nabla)\mathfrak{E}dV. \tag{16.10}$$

由类似方法，可以求出作用于物体上的总力矩。但这里不准备进行相应的計算，只是給出它的結果：

---

[1] 但是应着重指出，这积分內的被积式不能解釋为力的体密度。問題在于，电介质內的定域力，不但和場 $\mathfrak{E}$ 有关，而且也和它內部的本征場有关，由于动量守恒定律，后者对总力沒有貢献，但它影响力在物体体积內的分布。

$$\mathbf{K}=\int[\mathbf{P}\mathfrak{E}]dV+\int[\mathbf{r},(\mathbf{P}\nabla)\mathfrak{E}]dV. \tag{16.11}$$

在整个物体范圍内可以假定为不变的准均匀場内，(16.10)式在第一近似下給出

$$\mathbf{F}=\left(\int\mathbf{P}dV\nabla\right)\mathfrak{E}=(\mathscr{P}\nabla)\mathfrak{E}, \tag{16.12}$$

式中$\mathscr{P}$为极化电介质的总偶极矩，当然，把(11.8)式的$\mathscr{P}$直接取微分，也可以得到这一結果。在(16.11)式内，在第一近似下，与第一項比較，一般地可以略去第二項，因而得到下面的自然結果：

$$\mathbf{K}=[\mathscr{P}\mathfrak{E}]. \tag{16.13}$$

例　題

1. 設一介电球(半徑为 a) 位于均匀的外电場$\mathfrak{E}$内，由垂直于場方向的平面切为两半。試求两个半球之間的吸力。

解. 設想两个半球被一无窮小的狹縫分隔开，并将(16.8)式(其中$\varepsilon=1$)对半球表面积分，就可以求出这力，这时$\mathbf{E}$是球面附近眞空内的电場强度。根据(8.2)式，球内的場是均匀的，并且等于 $\mathbf{E}^{(i)}=3\mathfrak{E}(2+\varepsilon)$($\varepsilon$ 是球的介电常数)。狹縫内的場垂直于表面，并等于

$$\mathbf{E}=\mathbf{D}^{(i)}=\frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}.$$

在球的外表面上，

$$E_r=D_r^{(i)}=\frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}\cos\theta,$$

$$E_\theta=E_\theta^{(i)}=-\frac{3}{\varepsilon+2}\mathfrak{E}\sin\theta,$$

式中 θ 是半徑矢量和$\mathfrak{E}$方向之間的夹角。

算出积分后得到吸力为①

① 这个表达式在 $\varepsilon\to\infty$时的极限值和 §5 中例題 3 导电球的結果相同，只是偶然的（实际上这些力的符号是不同的）。这两种情况在物理上并不是等效的，可以从下面一点明显看出，即在两导电半球(电势相同)的狹縫内沒有电場，而前面的例題則有电場存在。

$$F=\frac{9(\varepsilon-1)^2}{16(\varepsilon+2)^2}a^2\mathfrak{E}^2.$$

2. 試求均匀的外电場內介电球形状的改变。

解. 和 § 5中例題 4 的解完全相似。在求球的形状的改变时，我們假定球的体积不变化①。对于自由能的彈性能部分，我們得到和 § 5 中例題 4 完全相同的式子。电能部分由下式得出

$$-\frac{\mathscr{P}\mathfrak{E}}{2}=-\frac{V}{8\pi}\frac{\varepsilon^{(x)}-1}{1+n(\varepsilon^{(x)}-1)}\mathfrak{E}^2,$$

而且，按照(16.1)式，x 軸上的介电常数为

$$\varepsilon^{(x)}=\varepsilon_0+a_1u_{xx}=\varepsilon_0+\frac{2}{3}a_1(u_{xx}-u_{yy})=\varepsilon_0+\frac{2}{3}a_1\frac{a-b}{R}.$$

从总自由能为最小値的条件得到

$$\frac{a-b}{R}=\frac{9\mathfrak{E}^2}{40\pi\mu}\cdot\frac{(\varepsilon_0-1)+5a_1}{(\varepsilon_0+2)^2}.$$

当 $\varepsilon_0\to\infty$时，这个式子过渡到为球导体的結果。

3. 試求各向同性的固体电介质內存在旁电荷时电介质內的体积力，假定电介质是均匀的。

解. 假定ε_0, a_1, a_2为常数，并利用方程$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$和$\operatorname{div}\mathbf{D}\cong\varepsilon_0\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho_{旁}$，于是从(16.4)式我們得到

$$f_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=\frac{\partial\sigma_{ik}^{(0)}}{\partial x_k}-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{a_1}{2}+a_2\right)\frac{\partial}{\partial x_i}E^2+\left(1-\frac{a_1}{2\varepsilon_0}\right)\rho_{旁}E_i.$$

§ 17. 压电体

电場中各向同性的电介质內所出現的內应力，是电場二次的效应。这种效应也存在于一系列晶类的晶体內。但是，在一定的对称类型下，晶体的电致伸縮性质具有完全不同的特征。在这些物体(称为压电体)內，电場所产生的內应力与場的一次冪成正比。相应地也存在相反的效应——压电体的形变引起压电体內出現电場，这电場与形变的大小成正比。

在压电体中，我們感兴趣的是基本的綫性效应，因而在普遍公

① 求体积的改变見 § 12 例題 1。

式(16.5)內，我們可以略去場的二次項。于是

$$\sigma_{ik}=\widetilde{F}\delta_{ik}+\left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}\right)_{T,\mathbf{E}}.$$

在下一节中，我們将采用未形变物体单位体积內物质的热力学量(參閱100頁上的底注)。这样理解 $\widetilde{F}$ 的意义时，我們就簡单地得到

$$\sigma_{ik}=\left(\frac{\sigma\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}\right)_{T,\mathbf{E}}. \tag{17.1}$$

相应地微分 $d\widetilde{F}$ 的热力学关系式为

$$d\widetilde{F}=-SdT+\sigma_{ik}du_{ik}-\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}d\mathbf{E}. \tag{17.2}$$

对其中最后一項，我們必須作下列說明：严格說来，在这种形式下，这一項[从(10.9)式移来]是属于变形物体的单位体积的。不考虑到这一点，我們就会有誤差，但是，在現在的情况下(对压电体而言)，这种誤差是比(17.2)式其余各項更高次的小量。

在(17.2)中，張量分量 u_{ik} 起着自变数的作用。有时取 σ_{ik} 的分量作为这种变数，也是很便利的。为此，必須引进热力学势，幷定义为

$$\widetilde{\Phi}=\widetilde{F}-u_{ik}\sigma_{ik}. \tag{17.3}$$

这个量的微分为

$$d\widetilde{\Phi}=-SdT-u_{ik}d\sigma_{ik}-\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}d\mathbf{E}. \tag{17.4}$$

应該着重指出，按照(17.3)和(17.4)式，在电动力学中引入热力学势 $\widetilde{\Phi}$ 与(17.1)式的正确性有关，因此，这只对压电体是可能的。

在这样定义了我們所需要的热力学量以后，現在我們来描述晶体的压电性质。选擇 σ_{ik} 和 E_k 为自变数，我們必須把感应强度 $\mathbf{D}$ 看作为它們的函数，而在这函数的展开式內必須只保存它們的一次項。在矢量分量展开为二秩張量分量的冪級数內，在最普遍情况下，綫性項可以写为 $4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl}$，其中常数 $\gamma_{i,kl}$ 的总和构成一

个三秩張量(引入因子 4π 是为了方便)。旣然張量 σ_{kl} 对它的下角标是对称的，因而十分显然，也可以假定張量 $\gamma_{i,kl}$ 对相应的两个下角标也是对称的：

$$\gamma_{i,kl}=\gamma_{i,lk}; \tag{17.5}$$

为了明显起見，我們用逗号将对称的下角标 k, l 与第三个下角标分开。我們把張量 $\gamma_{i,kl}$ 称为压电張量，晶体的压电性质即完全由它决定。

把描写压电性质的項加到晶体中的电感应强度的表达式(13.1)內，我們有

$$D_i=D_{i0}+\varepsilon_{ik}E_k+4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl}. \tag{17.6}$$

在热力学量內，也会出現相应的附加項。电場不存在时，非压电晶体內的热力学勢为

$$\tilde{\Phi}=\Phi=\Phi_0-\frac{1}{2}\mu_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm},$$

式中 Φ_0 是屬于未变形物体的，而第二項代表普通的彈性能量，由彈性恒定張量 μ_{iklm} 决定[①]。对压电体而言，我們有

$$\tilde{\Phi}=\Phi_0-\frac{1}{2}\mu_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm}-\frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}E_iE_k-$$

---

① 張量 μ_{iklm} 确定应力和形变的关系为

$$u_{ik}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ik}}=\mu_{iklm}\sigma_{lm}.$$

在“連續介质力学”中(第二部分，§ 10)，我們曾写出逆关系式：

$$\sigma_{ik}=\lambda_{iklm}u_{lm}.$$

显然，張量 μ_{iklm} 的所有对称性质完全和張量 λ_{iklm} 的对称性质相同。

在自由能 F 內，彈性能为正号：

$$F_{弹性}=\frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}.$$

从 F 內减去 $\sigma_{ik}u_{ik}$，即得到热力学勢，因此

$$\Phi_{弹性}=F_{弹性}-\sigma_{ik}u_{ik}=-\frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}=-\frac{1}{2}\mu_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm}.$$

$$-\frac{1}{4\pi}E_iD_{i0}-\gamma_{i,kl}E_i\sigma_{kl}. \tag{17.7}$$

后面三項的形式是这样决定的，由关系式

$$D_i=-4\pi\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial E_i}$$

所求得的 $\widetilde{\Phi}$ 对 E_i 的导数（保持內能和溫度不变）必須与(17.6)式相同。

知道了 $\widetilde{\Phi}$，就可以从(17.4)式得到形变張量用应力 σ_{ik} 和电場 $\mathbf{E}$ 所表示的公式为

$$u_{ik}=-\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\sigma_{ik}}\right)_{T,\mathbf{E}}=\mu_{iklm}\sigma_{lm}+\gamma_{l,ik}E_l. \tag{17.8}$$

应該注意到，在压电晶体內，把量 μ_{iklm} 和 ε_{ik} 作为彈性常数和介电常数，在一定的意义上是有条件的。在我們所选擇的定义下，它們分别給出电場强度不变时形变对彈性应力的依賴关系和应力不变时感应强度对电場强度的依賴关系。如果发生形变时电感应强度不变，或者我們所研究的是形变不变时感应强度对电場强度的依賴关系，那末，起着彈性系数和介电常数的作用的将是其他的量，这些量可由張量 μ, ε 和 γ 的分量表示出来（虽然形式相当复杂）。

求出压电物体內的場，必須和求它的形变同时进行，因而这是静电学和彈性理論的共同問題。也即是必須求出靜电学方程

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=0 \tag{17.9}$$

（$\mathbf{D}$ 从(17.6)式得出）和彈性平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=0 \tag{17.10}$$

的共同解，并且滿足物体表面上相应的边界条件，以及考虑到由(17.8)式所給出的 σ_{ik} 和形变之間的关系。在普遍情况下，这样来提出問題是很复杂的。

对于具有自由表面（即沒有加上任何机械外力）的压电椭球体，問題可以进一步簡化。在这种情况下（§ 8），压电体內的場，因而以及它的形变，都是均匀的，而全部彈性应力 $\sigma_{ik}=0$。

最后，我們提出这样一个問題，哪一些晶体对称类型容許存在压电性质。換句話說，必須考虑对称条件对張量 $\gamma_{i,kl}$ 的分量所加上的約束条件。在普遍情况下，这个張量（对下角标 k 和 l 是对称的）有 18 个不为零的独立分量，但实际上，独立分量的数目通常要比这少得多。

在給定晶体的全部对称变換中，張量 $\gamma_{i,kl}$ 的全部分量必須保持数值不变。由此立即得到，在任何情况下，具有对称中心的物体（当然其中也包括一切各向同性物体），不可能是压电体。实际上，在中心反射时（三个坐标都改变正負号），三秩張量的全部分量都会变号。

在 32 种晶类中，容許有压电性质的总共有 20 种。这首先是 §13 中所举出的具有热电性质的 10 种（热电体同时也是压电体）。此外，下列 10 类晶体也是压电晶体：

菱形系：D_2，

正方系：D_4, D_{2d}, S_4，

菱面系：D_3，

六角系：D_6, C_{3h}, D_{3h}，

立方系：T, T_d。

全部晶类的压电張量的不为零的分量，都列入本节的例題內。

例　題

1. 試对容許有压电性质的非热电晶类，求出張量 $\gamma_{i,kl}$ 的不为零的各分量。

解. 晶类 D_2 包含三个互相垂直的二次对称軸，我們选擇它們为 x, y, z 軸。繞这些軸旋轉 180°，三个坐标有二个变号。因为 $\gamma_{i,kl}$ 的分量和乘积

$x_i x_k x_l$ 一样变换，因而只是三个下角标都不相同的分量才不为零：

$$\gamma_{x,yz}, \gamma_{z,xy}, \gamma_{y,zx};$$

其余不为零的分量，由于 $\gamma_{i,kl}=\gamma_{i,lk}$，都等于这些分量。相应地，热力学势的压电部分为①

$$\tilde{\Phi}_{电压}=-2(\gamma_{x,yz}E_x\sigma_{yz}+\gamma_{y,xz}E_y\sigma_{xz}+\gamma_{z,xy}E_z\sigma_{xy}). \qquad (1)$$

在晶类 D_2 的坐标軸上，再加上二个对称平面，就得到晶类 D_{2d}，这二个对称平面通过其中一軸(設为 z 軸)，并把 x 軸和 y 軸之間的夹角分为两半。在其中一对称平面上的反射表示下列变换：$x\to y, y\to x, z\to z$。因此，由交换下角标 x 和 y 而得到的 $\gamma_{i,kl}$ 的不同的各分量应該相等，于是(1)式的三个系数中，只有二个是独立的：

$$\gamma_{z,xy}, \gamma_{x,yz}=\gamma_{y,xz}.$$

在晶类 D_2 上加上四个三次的对角对称軸，就得到晶类 T。繞这些对称軸旋轉时 x, y, z 軸循环换位，例如$x\to z, y\to x, z\to y$。因此，(1)式中的三个系数变成相等：

$$\gamma_{x,yz}=\gamma_{z,xy}=\gamma_{y,zx}.$$

对于立方晶类 T_d，得到相同的結果。

晶类 D_4 包含一个四次对称軸(z 軸)和在 xy 平面內的四个二次对称軸。除了晶类 D_2 的对称要素外，我們在这里只須再研究繞 z 軸旋轉 90°的情况，也即是只須再研究下列变换：$x\to y, y\to -x, z\to z$。由于这种变换，(1)式的系数有一个变成零($\gamma_{z,xy}=-\gamma_{z,yx}=-\gamma_{z,xy}$，由此得 $\gamma_{z,xy}=0$)，而其他二个系数只相差一个正負号：

$$\gamma_{x,yz}=-\gamma_{y,xz},$$

对于晶类 D_6 得到同样的結果。

晶类 S_4 包含下列变换：$x\to y, y\to -x, z\to -z$ 和 $x\to -x, y\to -y, z\to z$。不为零的各分量为

$$\gamma_{z,xy}, \gamma_{x,yz}=\gamma_{y,xz}, \gamma_{z,xx}=-\gamma_{z,yy}, \gamma_{x,zx}=-\gamma_{y,zy}.$$

适当地选擇 x, y 軸的方向，这些量中有一个可能变为零。

晶类 D_3 包含一个三次对称軸(z 軸)和在 xy 平面內的三个二次对称軸，

① 为了避免誤解起見，我們記住，如果将 Φ 的具体表达式对 σ_{ik} 直接求微分，来算出形变張量 u_{ik} 的分量，則对σ_{ik}(其中 $i\neq k$)分量的导数給出 u_{ik} 的相應分量的二倍值(参照“連續介质力学”第二版，第二部分，§10 末的底注)。

設其中一个对称軸为 x 軸。为了求出由于三次对称軸的出現所加上的限制，我們先引进复数“坐标”：

$$\xi=x+iy,\ \eta=x-iy,$$

然后再进行形式变换是很方便的；我們令 z 坐标保持不变。也可以把張量 $\gamma_{i,kl}$ 变换为新坐标。这时各分量的下角标值变为 ξ,η,z。繞軸旋轉120°后，这些“坐标”变换为

$$\xi\to\xi e^{\frac{2\pi i}{3}},\quad \eta\to\eta e^{\frac{-2\pi i}{3}},\ z\to z.$$

这时，張量 $\gamma_{i,kl}$ 中保持不变因而可以不为零的各分量为 $\gamma_{z,\eta\xi},\gamma_{\eta,z\xi},\gamma_{,\xi\xi\xi}$，$\gamma_{\eta,\eta\eta},\gamma_{z,zz}$。繞 x 軸轉 180°的变换为 $x\to x,y\to -y,z\to -z$，或者在“坐标系” ξ,η,z 中，为 $\xi\to\eta,\eta\to\xi,z\to -z$。这时 $\gamma_{z,\eta\xi}$ 和 $\gamma_{z,zz}$ 改变正負号，因而必須变为零，而上面列出的其余各分量則可以互相轉換，这样就得到下列等式：$\gamma_{\eta,z\xi}=-\gamma_{\xi,z\eta},\gamma_{\xi,\xi\xi}=\gamma_{\eta,\eta\eta}$ 要写出 $\widetilde{\Phi}_{压电}$ 的表达式，必須組成其下角标取值为 ξ,η,z时之总和 $-\gamma_{i,kl}E_i\sigma_{kl}$：

$$\widetilde{\Phi}_{压电}=-2\gamma_{\eta,z\xi}(E_\eta\sigma_{z\xi}-E_\xi\sigma_{z\eta})-\gamma_{\xi,\xi\xi}(E_\xi\sigma_{\xi\xi}+E_\eta\sigma_{\eta\eta}).$$

这里还必須将“坐标系”ξ,η,z 中的分量 E_i 和 σ_{ik}，用原来的坐标系 x,y,z 中的分量来表示。这利用張量的分量和相应的坐标乘积一样变换，是很容易做到的，因此，例如，从

$$\xi\xi=xx-yy+2ixy,$$

得到

$$\sigma_{\xi\xi}=\sigma_{xx}-\sigma_{yy}+2i\sigma_{xy}.$$

于是得到

$$\widetilde{\Phi}_{压电}=2a(E_y\sigma_{zx}-E_x\sigma_{zy})+b[2E_y\sigma_{xy}-E_x(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})],\tag{2}$$

式中 $a=2i\gamma_{\eta,z\xi},b=2\gamma_{\xi,\xi\xi}$ 为实常数。如从(2)式看出的①，在坐标 x,y,z 中 $\gamma_{i,kl}$的各分量間的关系式为：

$$\gamma_{y,zx}=-\gamma_{x,zy}\equiv 2a,$$

$$\gamma_{y,xy}=-\gamma_{x,xx}=\gamma_{x,yy}\equiv b.$$

在晶类 D_3 上加上一个与三次軸垂直的对称平面(xy 平面)，就得到晶类

① 在非正交坐标系中(ξ,η,z 就是这种坐标系)，大家知道，必須区別張量的协变分量和抗变分量。在变换到原来坐标系 x,y,z 时，也必須考虑到这种情况。但是，我們这样来繞过这个問題，就是直接根据(2)式的标量組合形式，求出 x,y,z 坐标系中 $\gamma_{i,kl}$ 的各分量間的关系式。

D_{3h}。在这平面上的反射是 z 变号，因而 $\gamma_{\eta,z\xi}=0$，于是在(2)式中只剩下系数为 b 的项。

晶类 C_{3h} 除了包含一个三次的对称軸外，还包含一个垂直于三次軸的对称平面。在这平面上的反射是 z 变号，因而下角标内 z 出現为奇数次的 $\gamma_{i,kl}$ 的各分量必須等于零。再考虑到上面所提到的由三次对称軸所加上的限制，我們发現，只有两个分量 $\gamma_{\eta,\eta\eta}$ 和 $\gamma_{\xi,\xi\xi}$ 不为零。为了使 $\widetilde{\Phi}$ 为实数，这些量必須为复数共軛。引进符号 $2\gamma_{\eta,\eta\eta}=a+ib$, $2\gamma_{\xi,\xi\xi}=a-ib$ 后，我們得到

$$\widetilde{\Phi}_{\text{压电}}=a[2E_y\sigma_{xy}-E_x(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})]+$$
$$+b[2E_x\sigma_{xy}+E_y(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})]. \qquad (3)$$

适当选擇 x, y 軸的方向，可以使 a 或 b 变为零。

2. 所求与上題相同，但晶类容許有热电性质。

解. 設 z 軸与二次、三次、四次或六次的对称軸相合，而在晶类 C_s 內，則垂直于对称平面。在晶类 C_{nv} 中，xz 平面和一个对称平面相合。适当选擇晶类 C_1 內的軸方向，还可使三个分量为零，而在晶类 C_s、C_n 中，由适当选擇 x, y 軸，可使一个分量为零。

下面对每种晶类，列出 $\gamma_{i,kl}$ 中不为零的各分量。

C_1 类：全部的 $\gamma_{i,kl}$。

C_s 类：包含下角标 z 为零或为两次的全部分量。

C_{2v} 类：$\gamma_{z,xx}$, $\gamma_{z,yy}$, $\gamma_{z,zz}$, $\gamma_{x,xz}$, $\gamma_{y,yz}$。

C_2 类：和 C_{2v} 中相同，还有 $\gamma_{x,yz}$, $\gamma_{y,xz}$, $\gamma_{z,xy}$。

C_{4v} 类：$\gamma_{z,xx}=\gamma_{z,yy}$, $\gamma_{z,zz}$, $\gamma_{x,xz}=\gamma_{y,yz}$。

C_4 类：和 C_{4v} 中相同，还有 $\gamma_{x,yz}=-\gamma_{y,xz}$。

C_{3v} 类：$\gamma_{z,zz}$, $\gamma_{x,xz}=\gamma_{y,yz}$, $\gamma_{x,xx}=-\gamma_{x,yy}=-\gamma_{y,xy}$, $\gamma_{z,xx}=\gamma_{z,yy}$。

C_3 类：和 C_{3v} 中相同，还有 $\gamma_{x,yz}=-\gamma_{y,zx}$, $\gamma_{y,xx}=-\gamma_{y,yy}=\gamma_{x,xy}$。

C_{6v} 类：$\gamma_{z,zz}$, $\gamma_{x,xz}=\gamma_{y,yz}$, $\gamma_{z,xx}=\gamma_{z,yz}$。

C_6 类：和 C_{6v} 中的相同，还有 $\gamma_{x,yz}=-\gamma_{y,zx}$。

3. 試求下列情况下非热电性质的压电晶体平行平面薄板的楊氏模量(拉应力和相对伸长之間的比例系数)：(1)薄板受到短路电容器两板的拉伸；(2)薄板受到未带电的电容器两板的拉伸；(3)沒有外电場时，薄板受到与其平面平行的拉伸。

解. (1)在这种情况下，薄板內的电場强度 $\mathbf{E}=0$。張量 σ_{ik} 的唯一不为

零的分量是拉应力 σ_{zz}（z 軸垂直于薄板平面①）。从(17.8)式，我們有 $u_{zz}=$ $=\mu_{zzzz}\sigma_{zz}$，由此得到楊氏模量 E 为

$$\frac{1}{E}=\mu_{zzzz}.$$

(2)在这种情况下，在薄板內 $E_x=E_y=0, D_z=0$，从(17.6)和(17.8)，我們有

$$D_z=\varepsilon_{zz}E_z+4\pi\gamma_{z,zz}\sigma_{zz}=0,$$

$$u_{zz}=\mu_{zzzz}\sigma_{zz}+\gamma_{z,zz}E_z.$$

从这两个等式中消去 E_z 后，我們得到

$$\frac{1}{E}=\mu_{zzzz}-\frac{4\pi\gamma^2_{z,zz}}{\varepsilon_{zz}}.$$

(3)在这种情况下，也是 $E_x=E_y=0, D_z=0$，設拉伸发生在 x 軸方向。我們有

$$D_z=\varepsilon_{zz}E_z+4\pi\gamma_{z,xx}\sigma_{xx}=0,$$

$$u_{xx}=\mu_{xxxx}\sigma_{xx}+\gamma_{z,xx}E_z.$$

消去 E_z，我們得到

$$\frac{1}{E}=\mu_{xxxx}-\frac{4\pi\gamma^2_{z,xx}}{\varepsilon_{zz}}.$$

4. 試求压电媒质內声速的表达式。

解. 在本問題內較为方便的是不用 σ_{ik}，而采用 u_{ik} 作为自变量。把 $\widetilde{F}$ 写为

$$\widetilde{F}=F_0+\frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}-\frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}E_iE_k-\frac{1}{4\pi}E_iD_{i0}+\beta_{i,kl}E_iu_{kl},$$

由此得

$$\sigma_{ik}=\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}=\lambda_{iklm}u_{lm}+\beta_{l,ik}E_l.$$

彈性理論的运动方程为

$$\ddot{u}_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=\lambda_{iklm}\frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k}+\beta_{l,ik}\frac{\partial E_l}{\partial x_k},$$

式中 $\mathbf{u}$ 是位移矢量，它和 u_{ik} 的关系为

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

---

① 没有假定它和任何选定的晶軸方向相合。

由方程 $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$ 得出

$$\varepsilon_{ik}\frac{\partial E_k}{\partial x_i}-4\pi\beta_{i,kl}\frac{\partial u_{kl}}{\partial x_i}=0,$$

我們用場势来表示电場强度:

$$E_i=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$

由此方程 rot $\mathbf{E}=0$ 被滿足。

在平面声波的情况下，$\mathbf{u}$ 和 φ 都与 $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$ 成正比，于是从上面写出的方程，得到

$$\omega^2 u_i=\lambda_{iklm}k_k k_l u_m-\beta_{l,ik}k_k k_l\varphi,$$

$$\varepsilon_{ik}k_i k_k\varphi+4\pi\beta_{i,kl}k_i k_k u_l=0.$$

由此消去 φ 后，得到 u_i 方程的相容条件为

$$\left|\omega^2\delta_{ik}-\lambda_{ilkm}k_l k_m-4\pi\frac{(\beta_{l,mi}k_l k_m)(\beta_{p,qk}k_p k_q)}{\varepsilon_{rs}k_r k_s}\right|=0.$$

在波矢量 $\mathbf{k}$ 的任一給定方向上，这方程一般說来定出声音的三个不同的相速度 $\frac{\omega}{k}$。压电媒质的特征是速度依賴于波方向的复杂关系。

§18. 热力学不等式

按照 §10 的公式，总自由能可以表示成积分的形式:

$$\mathscr{F}=\int F(T,\rho,\mathbf{D})dV, \tag{18.1}$$

式中积分对全部空間进行。我們假定被积式內的函数 $\mathbf{D}(x,y,z)$ 只滿足电介质內的方程:

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=0, \tag{18.2}$$

和在带有給定电荷的导体表面上滿足条件:

$$\int\mathbf{D}d\mathbf{f}=4\pi e; \tag{18.3}$$

由这些等式可以建立場和場源之間的关系式。此外，假定函数 $\mathbf{D}(x,y,z)$ 是任意的，特别是，不必预先要求它滿足第二个場方程 rot $\mathbf{E}=0\left(\text{式中 }\mathbf{E}=4\pi\frac{\partial F}{\partial\mathbf{D}}\right)$ 和在导体表面上滿足 $\varphi=$ 常数的边界条

件。我們現在证明，从积分(18.1)相对于函数 $\mathbf{D}(x, y, z)$ 的变化为极小值的条件，也可以得到这些不充分的方程，而函数 $\mathbf{D}(x, y, z)$ 的变化满足方程(18.2)和(18.3)。应該着重指出，这种推导的可能性先驗地是不明显的，因为求积分(18.1)的极小值时所要計及的場分布，并不相应于物理上可能的状态(因为它們并不滿足全部場方程)；但是，在自由能为极小值的热力学条件下，只有各种物理上可能的状态才可以相互比較。

在(18.2)式和(18.3)式的附加条件下，求积分(18.1)的极小值的問題，可利用拉格朗日因子方法得到解决。仿照这种方法，我們将条件(18.2)的变分乘上某一个尙未确定的坐标函数(我們用 $\frac{-\varphi}{4\pi}$ 表示它)，而将条件(18.3)的变分乘上一个未定的常数因子$\left(\text{表示为}\frac{\varphi_0}{4\pi}\right)$，然后令变分之和等于零：

$$\int \delta F dV - \frac{1}{4\pi}\int \varphi \,\mathrm{div}\, \delta\mathbf{D} dV + \frac{\varphi_0}{4\pi}\oint \delta\mathbf{D} d\mathbf{f} = 0.$$

第一項我們写为①

$$\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}}\right)_{T,\rho} \delta\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\delta\mathbf{D},$$

第二項进行分部变換：

$$\int \varphi \,\mathrm{div}\, \delta\mathbf{D} dV = \oint \varphi \delta\mathbf{D} d\mathbf{f} - \int \delta\mathbf{D}\, \mathrm{grad}\, \varphi dV.$$

結果得到

$$\int (\mathbf{E} + \mathrm{grad}\, \varphi)\delta\mathbf{D} dV + \oint (\varphi_0 - \varphi)\delta\mathbf{D} d\mathbf{f} = 0.$$

---

① 在給定的溫度下，自由能为极小值。变分应該对二个自变量——$\mathbf{D}$ 和 ρ——进行，但在这里我們感兴趣的只是对 $\mathbf{D}$ 的变分結果。对密度求积分(18.1)的变分(在物体总质量不变的附加条件下，即积分 $\int \rho dV$ 不变的条件下)給出通常的热平衡条件之一——化学势 ζ 不变。

由此得出結論：在全部体积内，必須 $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$（因此 $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$），而在导体面上，$\varphi=\varphi_0=$常数。这也就是表示电場强度的正确方程，而拉格朗日因子 φ 就是它的場势。

由类似方式，可以证明，从积分

$$\tilde{F}=\int\tilde{F}(T,\rho,\mathbf{E})dV$$

为极小值的条件，我們可得到电感应强度方程，其中求 $\mathbf{E}(x,y,z)$ 的变分时的附加条件是 $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$，而在导体表面上 $\varphi=$常数。实际上，我們有

$$\delta\mathscr{F}=\int\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\mathbf{E}}\delta\mathbf{E}dV-\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{D}\nabla\delta\varphi dV=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\oint\delta\varphi\mathbf{D}d\mathbf{f}-\frac{1}{4\pi}\int\delta\varphi\operatorname{div}\mathbf{D}dV=0.$$

因为在导体表面上 $\delta\varphi=0$，故第一积分等于零；由于在导体的体积内，$\delta\varphi$ 是任意的，因而从第二积分，就得到所求的方程：$\operatorname{div}\mathbf{D}=0$。

如果导体不在外电場内（特别是不存在带电的导体），那末可以把热力学平衡条件表述为总自由能（18.1）取絕对（即无任何条件的）极小值的条件。这条件归結为自由能密度 F 作为自变数 $\mathbf{D}$ 的函数取极小值的条件：

$$\frac{\partial F}{\partial\mathbf{D}}=\frac{\mathbf{E}}{4\pi}=0,$$

也即是在全部空間内，电場强度必須等于零。如果这时能够求出感应强度的分布满足条件 $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$，則所得到的状态就相应于热力学平衡态[①]。

令自由能的一阶变分等于零，我們只能得到自由能取极小值的必要条件，而不是充分的条件。要得到充分条件，必須研究二阶

① 这里所指的导体是当 $\mathbf{E}=0$ 时其中可能有 $\mathbf{D}\neq0$（参閱下一节）。在相反的情况下，在全部空間内，我們得到平庸結果：$\mathbf{E}=0$，$\mathbf{D}=0$。

变分。这些条件具有某种不等式的形式（称为热力学不等式），大家知道，这也即是使物体保持稳定状态的条件①。

当D和E的关系为綫性时，全部关系式可以大为簡化，而我們感兴趣的热力学不等式(它与物体的介电性质有关)变成明显形式。于是总自由能为

$$F_0+\int\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}dV.$$

显然，只有 $\varepsilon>0$，它才有极小值；否则，使感应强度D取任意大的值，可以使积分无限制地减小。由此可見，在这种情况下，我們实质上沒有得到任何新的东西，因为我們已經知道，介电常数实际上不但必須是正值，而且还应該大于1（参閱§14）。

在D和E的关系为任意的这类普遍情况下，必須考虑积分(18.1)的二阶变分，而且必須同时把D和ρ变分(只保持溫度不变)。在各向同性物体內，$F(T,\rho,\mathbf{D})$只与矢量D的絕对值有关，因而它的三个分量可以独立变分。选擇未变分的矢量D的方向为z軸。于是矢量D的絕对值的变化可用它的分量的变化表示为(精确到二次项)

$$\delta D=\delta D_z+\frac{1}{2D}(\delta D_x)^2+\frac{1}{2D}(\delta D_y)^2.$$

积分(18.1)的一阶和二阶变分都包含在下面的式子內：

$$\int\left\{\frac{\partial F}{\partial D}\delta D+\frac{\partial F}{\partial\rho}\delta\rho+\frac{1}{2}\frac{\partial^2F}{\partial D^2}\delta D^2+\frac{\partial^2F}{\partial D\delta\rho}\delta D\delta\rho+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2F}{\partial\rho^2}\delta\rho^2\right\}dV.$$

把δD代入，归并二次項后，得到二阶变分为

$$\int\frac{1}{2D}\frac{\partial F}{\partial D}(\delta D_x^2+\delta D_y^2)dV+$$

① 参閱"統計物理学"第3版，§21。

$$+\int\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2}\delta D_z^2+\frac{\partial^2 F}{\partial D\partial\rho}\delta D_z\delta\rho+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}\delta\rho^2\right\}dV. \quad (18.4)$$

这里写出的二项是各自独立的。如果 $\frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial D}>0$, 则第一项为正值。但$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}}=\frac{\mathbf{E}}{4\pi}$, 于是視矢量 $\mathbf{D}$ 与矢量 $\mathbf{E}$ 为同向或反向, 导数$\frac{\partial F}{\partial D}$取正值或取負值。由此可知, 矢量$\mathbf{D}$和$\mathbf{E}$必須是同向的。

(18.4)式第二項为正值的条件为

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}>0, \quad (18.5)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\rho\partial D}\right)^2>0. \quad (18.6)$$

既然$\frac{\partial F}{\partial\rho}=\zeta,\ \frac{\partial F}{\partial D}=\frac{E}{4\pi}$, 因而由其中第一式得出

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)_{D,T}>0, \quad (18.7)$$

而第二式可写成雅可裨形式:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial D},\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)}{\partial(D,\rho)}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(D,\rho)}>0.$$

从变数 D, ρ 变换到变数 D, ζ, 我們有

$$\frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(D,\rho)}=\frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(D,\zeta)}\frac{\partial(D,\zeta)}{\partial(D,\rho)}=\left(\frac{\partial E}{\partial D}\right)_\zeta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)_D>0;$$

由于(18.7)式, 这个不等式等效于条件:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial D}\right)_{\zeta,T}>0. \quad (18.8)$$

这样一来, 我們就得到了所求的热力学不等式。在电場不存在时, 不等式(18.7)变成为等溫压縮取正值的普通条件$\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T>0$①。由

① 我們記住, 当电場不存在时, ζ 是物质单位质量的热力学势, 而按照通常的热力学关系, 它的微分 $d\zeta=\frac{1}{\rho}dp-\frac{S}{\rho}dT$, 于是$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)_T=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T$。在上面叙述的推导中, 并未考虑到通常的热力学不等式中的第二个式子, 即热容量为正的条件。

不等式(18.8)得出 $\varepsilon>0$, 因为 $E\to0$ 时, 感应强度 $D\to\varepsilon E$。

在不等式(18.5)和(18.6)中, 第二式是更强的条件: 因为它比第一个不等式更早地被破坏, 而相反的情况则不可能。等式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\rho\partial D}\right)^2=\frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(D,\rho)}=0$$

相应于所謂临界态①。乘上异于零的因子 $\frac{\partial(D,\rho)}{\partial(E,\rho)}$ 后, 这一条件可以更方便地写成另一种形式:

$$\frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(E,\rho)}=\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)_{E,T}=0. \tag{18.9}$$

要求出物质的临界态保持稳定的附加条件, 必须研究三阶和四阶变分, 这里我們不准备詳細討論。只是指出, 由它得到下列的結果:

$$\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}\right)_{E,T}=0, \tag{18.10}$$

$$\left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial\rho^3}\right)_{E,T}>0, \tag{18.11}$$

这和电場不存在的式子相似。

例 題

試求电場内介电物质的临界点的移动

解. 把(10.18)的 ζ 的表达式代入(18.9)式, 我們得到

$$\left(\frac{\partial\zeta_0}{\partial\rho}\right)_T-\frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\rho^2}\right)_T=0.$$

当 $E=0$ 时的化学势为 $\left(\frac{\partial\zeta_0}{\partial\rho}\right)_T=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T$ (参閱118頁上的底注), 式中的 $p=p(\rho,T)$ 必須理解为电場不存在时物质的狀态方程。由此可見,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T=\frac{\rho E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\rho^2}\right)_T.$$

① 参閱"統計物理学"第三版, § 80。

当电場不存在时，临界点由等式$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T=0$求出，而且对于它的稳定条件，必須同时是$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_T=0$。因此，我們有

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \cong \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\Delta\rho+\frac{\partial^2 p}{\partial \rho\partial T}\Delta T \cong \frac{\partial^2 p}{\partial \rho\partial T}\Delta T,$$

式中ΔT，$\Delta\rho$分别为临界温度和密度的移动（如最后的結果所证实的，这些移动是同一級小量），最后，对于温度的移动，我們得到

$$\Delta T=\frac{\frac{\rho E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2}\right)_T}{\frac{\partial^2 p}{\partial \rho\partial T}}.$$

临界压强的移动，按照

$$\Delta p=\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \Delta T$$

由ΔT决定。为了求出$\Delta\rho$，必須同样地利用等式(18.10)。

§19. 铁电体

同一物质的不同晶体异构体，有热电的，也有非热电的。如果这两种异构体的轉变是由于第二种相变，則在轉变点附近，物质表現出一系列奇异的特性，使它不同于通常的热电体。这些性质称为铁电性质。

在通常的热电晶体內，自发极化方向的改变，要求晶体点陣也作重大的改变。即使这种改变的最后結果在能量上是有利的，但也不可能实現它，因为这要求克服很高的“能量势垒”。

在铁电体內，情况迥然不同，这是因为在第二种相变点附近（居里点处），在热电相晶体点陣內的原子排列，和在非热电相晶体点陣內的原子排列差别很小（由于这一点，自发极化也很小）。由于这一原因，自发极化方向的改变，只要求晶体点陣作很小的改变（原子发生很小的位移），因而比較容易发生。

物体的铁电性质的具体特征，主要依賴于它的晶体对称性。热电相的自发极化方向（我們称它为铁电軸），决定于居里点另一

边的非热电相的結构。在某些情况下，这种决定是唯一的，即铁电軸只能在完全一定的晶向上；在这种情况下，自发极化方向的确定，可精确到仅差一个正負号，因为在非热电相内，平行于铁电軸的两个相反方向，这时必須是完全等效的（否則，这种晶体异构体具有热电性质）。在另一些情况下，非热电相的对称性表現为在几个等价的晶向上容許发生自发极化①。

根据第二种相变的普遍理論，发展了铁电体的定量理論，这是由 B. Л. 金茲堡提出的(1945)②。

作为进一步討論的基础，我們提出下列一个与状态的热力学稳定性有关的思考。从这一观点看来，相变的特征是，在相变点的一边，$\mathbf{D}=0$ 的状态是稳定的，而在另一边，在任何情况下，这种状态都不会是稳定的，結果产生不为零的感应强度（即使电場 $\mathbf{E}$ 等于零）。为了明确起見，我們下面将假定非热电相($\mathbf{D}\neq 0$)相应于溫度 $T<\Theta$(Θ 为相变点)，但是应着重指出，这种相分布虽然是比較常发生的，但却不是必然发生的，自然界也存在相反的情况。

首先，我們感兴趣的是物质的介电性质，开始我們假定，物体内不存在內应力。为了求出稳定条件，可以从物体的总热力学势为极小值（保持溫度不变和电压等于零）的条件出发。如我們在 § 18 中所看到的，这条件归結为单位体积內的热力学势 Φ 的二阶变分为正值的条件。对于感应强度接近零的状态，Φ 的二阶变分簡单地为下列的表达式：

---

① 第一种类型的例子是酒石酸鉀鈉，它的非热电相具有菱形对称性，其中（居里点上）铁电軸发生在完全一定的晶軸方向（二次軸之一），而且晶体点陣为单斜形的。

第二种例子是鈦酸鋇。它的非热电异构体具有立方点陣，而三个立方軸的任何一个都可以成为铁电軸。但在居里点上发生自发极化以后，这三个方向当然就不再等效了：只有铁电軸仍然是四次軸，而点陣变成正方形的。

② 参閱“統計物理学”第三版第十四章。但是下面的闡述与通常的形式不同。

$$\Phi-\Phi_0=\frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}^{-1}D_iD_k.$$

如果选擇坐标軸为張量 ε_{ik} 的主軸，那末

$$\Phi-\Phi_0=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon^{(x)}}D_x^2+\frac{1}{\varepsilon^{(y)}}D_y^2+\frac{1}{\varepsilon^{(z)}}D_z^2\right).\tag{19.1}$$

只要三个系数 $\frac{1}{\varepsilon^{(i)}}$ 都是正的，則 $\mathbf{D}=0$ 的状态总是滿足穩定条件(即相应于 Φ 为极小值)。因此，只要这些系数有一个变号，就可能产生热电相。第二种相变点相应地由这系数变为零的条件求出。

这时，$\frac{1}{\varepsilon^{(i)}}$ 变为零的軸成为铁电軸。根据非热电相的对称性，在这里可能有各种不同的情况。如果这种对称性为 $\varepsilon^{(x)}\neq\varepsilon^{(y)}\neq\neq\varepsilon^{(z)}$，則(19.1)式的系数只有一个变为零，于是铁电軸的位置是唯一的。如果 $\varepsilon^{(x)}=\varepsilon^{(y)}=\varepsilon^{(z)}$(于此要求立方对称)，則三个系数同时为零，于是铁电軸可发生于任一方向上(見后面)。最后，如果对称性为 $\varepsilon^{(x)}=\varepsilon^{(y)}\neq\varepsilon^{(z)}$，則(19.1)式內的系数或者一个为零，或者二个都为零。

我們首先来研究取铁电軸为 z 軸的单一位置的情况。这时在 x 和 y 軸方向，晶体的介电性质不表現出任何异常现象，而要研究 z 軸方向的介电性质，只要考虑热力学势中含 D_z 的項就够了。

(19.1) 式实质上是 Φ 展开为 D 的冪級数的头几項。因为在相变点附近，$\frac{1}{\varepsilon^{(z)}}$ 很小，因而除了二次項外，在这一区域內，还必須考虑对 D_z 的展开式內以下的一項。展开式內的奇次冪項不可能存在，因为以 $-D_z$ 代換 D_z 时，这些項变号(同时 Φ 值改变)，而且沿 z 軸的两个方向在这种情况下是等效的。因此，二次項以后的一項是含有 D_z^4 的項:

$$\Phi=\Phi_0+\frac{1}{8\pi\varepsilon^{(z)}}D_z^2+\frac{B}{16\pi}D_z^4.$$

为了使$D_z=0$的状态在$T=\Theta$的点处是稳定的，十分显然，必須使系数B在这一点及其周圍取正值。在相变点附近，$\frac{1}{\varepsilon^{(z)}}$可以展开为$T-\Theta$之差的冪級数；展开式的第一項为$\alpha(T-\Theta)$，其中系数$\alpha$为正値(例如，$T>\Theta$时，必須$\frac{1}{\varepsilon^{(z)}}>0$)。于是，

$$\varepsilon^{(z)}=\frac{1}{\alpha(T-\Theta)}, \tag{19.2}$$

而热力学势为

$$\Phi=\Phi_0+\frac{\alpha(T-\Theta)}{8\pi}D_z^2+\frac{B}{16\pi}D_z^4. \tag{19.3}$$

由上面写出的全部公式，已足以闡明轉变点附近我們所感兴趣的铁电体的全部性质。首先，按照公式$E_z=4\pi\frac{\partial\Phi}{\partial D_z}$，得到

$$E_z=\alpha(T-\Theta)D_z+BD_z^3. \tag{19.4}$$

这是确定铁电体的內应力和感应强度的关系的基本公式。

当$T>\Theta$(在非热电相內)时，D_z和E_z一起变为零。当E_z增大时（保持$T-\Theta$的值不变），感应强度在开始时按綫性定律$\left[D_z=\frac{E_z}{\alpha(T-\Theta)}\right]$增加，在$E_z$达到相当大值后，則按定律$D_z=\left(\frac{E_z}{B}\right)^{\frac{1}{3}}$而增加。綫性定律內的比例系数$\varepsilon^{(z)}$是非热电相的介电常数。在$T\to\Theta$时，它与差值$T-\Theta$成反比而无限地增加；但是与此同时，服从綫性定律的区域逐漸縮小。

在$T<\Theta$(热电相)时，$D_z=0$一般地不相应于稳定状态。当$E_z=0$时，感应强度具有不为零的值，按照(19.4)式，它等于

$$D_z=D_{z0}=\pm\sqrt{\frac{\alpha(\Theta-T)}{B}}. \tag{19.5}$$

由此可見，铁电体的自发极化$P_{z0}=\frac{D_{z0}}{4\pi}$在趋近于居里点时与$\sqrt{\Theta-T}$成正比地减少。

热电相的"介电常数"可以定义为$E_z=0$时导数$\frac{dD_z}{dE_z}$所取的值。从(19.4)式，我們有

$$1=[-\alpha(\Theta-T)+3BD_z^2]\frac{dD_z}{dE_z},$$

把(19.5)代入上式，我們得到

$$\left.\frac{dD_z}{dE_z}\right|_{E_z=0}=\frac{1}{2\alpha(\Theta-T)}.$$

在E_z充分小时，D_z和E_z的关系为

$$D_z-D_{z0}=\frac{1}{2\alpha(\Theta-T)}E_z. \qquad (19.6)$$

由比較(19.2)和(19.6)得出，在离开居里点的相同距离上，热电相的"介电常数"比非热电相的介电常数小二倍。

将(19.3)式的Φ对温度求微分，得到熵为

$$S=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_D=S_0-\frac{\alpha}{8\pi}D_z^2$$

(这里略去了四次项，因为二次项不为零)。在非热电相內，$E_z=0$时D_z也等于零，于是$S=S_0$。对于热电相，代入(19.5)式的D_z，得到

$$S=S_0-\frac{\alpha^2}{8\pi B}(\Theta-T).$$

由此求得轉变点处热电相的热容量为

$$C_p=T\frac{\partial S}{\partial T}=C_{p0}+\frac{\alpha^2}{8\pi B}\Theta, \qquad (19.7)$$

式中C_{p0}为同一点处非热电相的热容量。由此可知，如果$E_z=0$时铁电体从一种相轉变为另一种相，則和通常的第二种相变一样，伴随有热容量的突变。于是$C_p>C_{p0}$，也即是轉变为热电体时热

容量增大。

现在回到研究热电相内（即 $T<\Theta$ 时）的(19.4)式。图 13 所示是由这方程所得出的函数 $D_z(E_z)$ 的示例图。首先我們看到，曲綫 CC' 段（图 13 上的虛綫）一般幷不相应于自然界可能存在的稳定态。在这一段上，

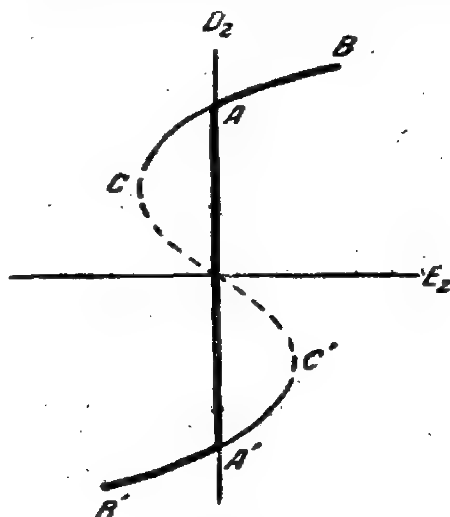


图. 13

$$\frac{\partial E_z}{\partial D_z}=4\pi\frac{\partial^2\Phi}{\partial D_z^2}<0,$$

而且由热力学势的二阶变分应取正值的条件，要求这个导数的正負号必須相反。C 点和 C' 点的纵坐标由等式 $\frac{\partial E_z}{\partial D_z}=0$ 求出，于是我們得到結論，在热电相内，$|D_z|$ 的可能值的下限为条件：

$$D_z^2>\frac{\alpha(\Theta-T)}{3B}. \tag{19.8}$$

如果研究 E_z 为給定值时的铁电体状态，則在 C 点和 C' 点的横坐标間的区域内，D_z 的可能值仍具有双值，于是就产生了这两个可能值有什么物理意义的問題。在这里我們假設铁电体为均匀的平行平面板（铁电軸垂直于板面），放在电容器的两板之間，电容器两板上的电势保持不变，也即是产生給定場强为 $E=E_z$ 的均匀电場。

当导体的电势不变时，保持稳定的条件要求热力学势 $\tilde{\Phi}=\Phi-\frac{1}{4\pi}\mathbf{ED}$ 为极小值。特别是 $\mathbf{E}=0$ 时存在两种状态，它們只相差 D_z 的正負号（图 13 曲綫上的 A 点和 A' 点），但相应于同一个 $\tilde{\Phi}$ 值（$=\Phi$）。因此，这两个状态的稳定程度相同，也即是它們代表两种同时存在的“相”，幷且互相接触。

由此可見，与曲綫上的 AC 和 $A'C'$ 段相应的状态不是絕对的稳定态，而只是亚稳态。但是不难直接证明，AC 和 $A'C'$ 段上的 $\tilde{\Phi}$ 值，在相同的 E_z 值下，实际上要大于 $A'B'$ 和 AB 分支上相应的 $\tilde{\Phi}$ 值。A 点和 A' 点的纵坐标由(19.5)式得出。由此可見，亚稳区域在下列間隔内：

$$\frac{\alpha(\Theta-T)}{3B}<D_z^2<\frac{\alpha(\Theta-T)}{B}. \tag{19.9}$$

$\mathbf{E}=0$ 的两“相”的存在是很重要的，因为这使铁电体可以分解为許多单个的区域(或“磁疇”)，它們的差别只是极化方向不同。在这些区域的分界面上，$\mathbf{D}$ 的法向分量和 $\mathbf{E}$ 的切向分量应滿足連續条件。其中第二个条件恒被滿足(因为一般地 $\mathbf{E}=0$)。从第一个条件得出，磁疇壁必須平行于 z 軸。

磁疇的具体形状和大小，由物体的总热力学势为极小值的条件得出[①]。

如果我們不討論这种結构的細节，而只研究物体内大于磁疇綫度的小段，則可以引入对这些段的体积求平均而得到的平均感应强度 $\bar{D}$。显然，其分量 $\bar{D}_z$ 可以取图 13 中 A 点和 A' 点的纵坐标間的一切值，也即是下列区域内的一切值：

$$-\sqrt{\frac{\alpha(\Theta-T)}{B}}<\bar{D}_z<\sqrt{\frac{\alpha(\Theta-T)}{B}}. \tag{19.10}$$

换句話說，如果在图 13 上把 D_z 理解为按上述意义平均得到的平均感应强度，則磁疇結构区域相应于竪直綫段 AA'，而粗綫表示的曲綫 $BAA'B'$，則相应于物体所得到的全部稳定态。

铁电体必須具有磁疇結构，特别是当它不在外电場内时．实际上，在 § 18 内我們已見到，在沒有外加电場时，热力学平衡条件归結为 Φ 为 $\mathbf{D}$ 的函数取絕对极小值的条件；这时处处应該是 $\mathbf{E}=$

① 对于铁电体，这个問題在現在几乎还未进行研究。

$=0$①。

現在研究立方系的铁电体（在非热电相内）。立方对称要求 $s^{(x)}=s^{(y)}=s^{(z)}\equiv s$，并容許有两个独立的四次不变式，它們由矢量 **D** 的分量組成，例如两个不变式可以选擇为

$$(D_x^4+D_y^4+D_z^4) \text{ 和 } (D_x^2D_y^2+D_x^2D_z^2+D_y^2D_z^2).$$

因此，热力学势的展开式为

$$\Phi=\Phi_0+\frac{\alpha(T-\Theta)}{8\pi}(D_x^2+D_y^2+D_z^2)+\frac{B}{16\pi}(D_x^4+D_y^4+D_z^4)$$

$$+\frac{C}{8\pi}(D_x^2D_y^2+D_x^2D_z^2+D_y^2D_z^2), \tag{19.11}$$

根据和上面相同的原因，我們假定了 $\frac{1}{s}=\alpha(T-\Theta)$；$\alpha, B, C$ 是常数。

然而，应該注意到，立方对称也容許有三次的不变式 $D_xD_yD_z$（对不包含对称中心的立方晶类 T 和 T_d 而言）。在这种情况下，$\mathbf{D}=0$ 的状态显然不滿足稳定条件（不相应于 Φ 的极小值），于是居里点一般不存在。因此，铁电体的轉变只在立方系的晶类 O, T_h 和 O_h 內存在，这也就是在(19.11)的展开式所作的假定。

(19.11)式內四次項之和必須是实在正値。为此，必須

$$B>0,\quad C>-B. \tag{19.12}$$

如上面已指出的，沒有外加电場时，铁电体的自发极化取决于 Φ 为 **D** 的函数取絕对极小值的条件。特别是，因为(19.11)式內的二次項和 **D** 的方向无关，因而自发极化方向决定于 D 的絕对值不变时四次項取极小值的条件。这时可能有两种情况。如果 $C>B$，則 Φ 的极小值相应于 **D** 的方向在 x, y, z 軸的任一个軸上，

---

① 应着重指出，这里所指的是总热力学平衡，它們存在于铁电体內，但不可能存在于通常的热电体內，这是由于上面提到的极化重新改变取向是很困难的（因而形成磁疇也很困难）。

也即是在立方体三个棱的任何一棱上(晶軸方向为[001], [010], [100])。如果 $C<B$, 則当 **D** 的方向沿立方体四条空間对角綫的任何一条时[晶軸方向为[111], [$\bar{1}$11]等等], 也即是当

$$D_x^2=D_y^2=D_z^2=\frac{1}{3}D^2$$

时, Φ 达到极小值。在第一种情况下, 铁电体有自发极化的热电相是立方对称的, 而在第二种情况下, 为菱面对称。

例如, 我們更詳細地来研究第一种情况($C>B$), 并且取居里点以下的自发极化方向为 z 軸。自发极化数値由下列式子的极小値求出

$$-\frac{\alpha(\Theta-T)}{8\pi}D^2+\frac{B}{16\pi}D^4,$$

由此得

$$D_0^2=\frac{\alpha(\Theta-T)}{B}. \tag{19.13}$$

当然, 在居里点以下, "介电常数"在 z 軸和在 x, y 軸上各不相同。如果电場**E**很小, 則 D_x, D_y 和 D_z-D_0 也很小。微分(19.11)式, 这时我們得到

$$E_z=4\pi\frac{\partial\Phi}{\partial D_z}=-\alpha(\Theta-T)D_z+BD_z^3\cong 2BD_0^2(D_z-D_0),$$

$$E_x=4\pi\frac{\partial\Phi}{\partial D_x}\cong[CD_0^2-\alpha(\Theta-T)]D_x,$$

由此得

$$D_z-D_0=\frac{1}{2\alpha(\Theta-T)}E_z,$$

$$D_x=\frac{1}{\alpha(\Theta-T)\left(\frac{C}{B}-1\right)}E_x. \tag{19.14}$$

在居里点以上, 立方铁电体的介电常数在各方向均相同, 即等于

$$\varepsilon=\frac{1}{\alpha(T-\Theta)}. \tag{19.15}$$

最后，扼要地討論一下铁电体的彈性性质。

根据晶类的不同，铁电体的非热电相可以具有或不具有压电性质①。在这种情况下，特别有趣的是那种压电晶体，它們的对称性容許在形变和沿铁电軸的极化之間有压电关系存在。屬于这一类的为晶类 D_2, D_{2d}, S_4；在这三种情况下，铁电軸上的感应强度 D_z 包含在热力学势的压电部分內，其形式为②

$$-\lambda_{z,xy}D_z\sigma_{xy}.$$

具有上述对称性的晶体，其在彈性能內的 σ_{xy} 分量，包含在下列形式的項內：

$$-\mu_{xyxy}\sigma_{xy}^2.$$

这样一来，我們得到居里点附近的热力学势为(为簡单起見，采用符号 $\lambda_{z,xy}=\lambda$, $\mu_{xyxy}=\mu$)

$$\Phi=\Phi_0+\frac{\alpha(T-T_0)}{8\pi}D_z^2+\frac{B}{16\pi}D_z^4-\lambda D_z\sigma_{xy}-\mu\sigma_{xy}^2. \tag{19.16}$$

包含其余分量的項，我們不感兴趣，因为它們不会导至居里点附近的压电性质有任何异常現象。

将Φ对 D_z 和 σ_{xy} 求微分，我們得到电場 E_z 和形变 u_{xy} 为③

$$E_z=4\pi\frac{\partial\Phi}{\partial D_z}=\alpha(T-T_0)D_z+BD_z^3-4\pi\lambda\sigma_{xy}, \tag{19.17}$$

$$u_{xy}=\frac{1}{2}\lambda D_z+\mu\sigma_{xy}. \tag{19.18}$$

---

① 具有压电性质的铁电体的非热电相屬于 109 頁上所列十种晶类中的八类：$D_2, D_4, D_{2d}, S_4, D_3, D_6, C_{3h}, D_{3h}$。

② 因为我們在这里利用了势 Φ，而沒有如 § 17 中一样采用 $\tilde{\Phi}$，因而压电張量 $\lambda_{i,kl}$ 也不和前面引入的張量 $\lambda_{i,kl}$ 相同。当然，这些張量的对称性是一样的。

③ 关于对分量 u_{ik} 的微分，参閱 110 頁上的底注。

当电場E很弱时，在非热电区域內，可以略去(19.17)式內含有D_z^3的項:

$$E_z = \alpha(T-T_0)D_z - 4\pi\lambda\sigma_{xy}.$$

把(19.18)的D_z代入上式，我們得到

$$u_{xy} = \frac{\lambda}{2\alpha(T-T_0)}E_z + \left[\mu + \frac{2\pi\lambda^2}{\alpha(T-T_0)}\right]\sigma_{xy}.$$

这个式子內σ_{xy}前面的系数，在电場强度E_z保持不变时，起着形变的彈性模量的作用，而(19.18)式中的μ是感应强度D_z不变时的形变的彈性模量。因此，可以写出

$$\mu^{(E)} = \mu^{(D)} + \frac{2\pi\lambda^2}{\alpha(T-T_0)}, \tag{19.19}$$

式中的上角标表示形变特征。我們看到，这两个系数在居里点附近的行为完全不同：在趋近居里点时$\mu^{(D)}$成为有限的常数值，而模量$\mu^{(E)}$則无限制地增大。

在热电区域內，(19.18)式指明，自发极化引起物体发生一定的形变。当內应力不存在和場强$\mathbf{E}$为零时，形变u_{xy}和D_{z0}成正比，也即是按照(19.5)式，与$\sqrt{\Theta-T}$成正比。

如果铁电体的非热电相的对称性(例如立方对称)不容許存在綫性(对$\mathbf{D}$来說)的压电效应，則在热力学势展开为σ_{ik}和$\mathbf{D}$的冪級数內，不为零的头几項是D_i分量的二次項，也即是其形式为

$$-\gamma_{iklm}D_iD_k\sigma_{lm}, \tag{19.20}$$

式中γ_{iklm}是四秩張量，它对两对下角标i，k和l，m都是对称的。

对热力学势采用(19.20)式的合理性，可能会引起怀疑，因为在§17中曾經指出过，只有在略去二次效应的条件下，才能利用(19.20)式。但是，由于电場强度$\mathbf{E}$比感应强度$\mathbf{D}$[1]小得多(在居

[1] 例如，从(19.4)式看出，等式右边的第一項包含小量$T-\Theta$，而第二項包含$\mathbf{D}$的三次項。

里点附近)，因此，铁电体在这种意义上是一个例外。热力学势的引进，是由于忽略了与 EDu_{ik} 同数量级的量(或者与 $ED\sigma_{ik}$ 同数量级的量)；而(19.20)式是与 $D^2\sigma_{ik}$ 同数量級的量。

第三章　恒定电流

§20. 电流密度和电导率

上面已經討論过了靜电荷所产生的电場，現在我們来研究导体內电荷的稳定运动(恒定电流)。

我們用 $\mathbf{j}$ 表示电荷通量的平均密度，称它为电流密度[①]。在恒定电流內，$\mathbf{j}$ 的空間分布与时間无关，而且遵从下列方程:

$$\operatorname{div}\mathbf{j}=0, \tag{20.1}$$

这个式子表明在导体任何一部分体积內的总平均电荷不变。

恒定电流流过的导体內的电場，也是不变的，因此，滿足下列方程:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0, \tag{20.2}$$

也即是它具有电势。

除了(20.1)和(20.2)式以外，还应該加上一个联系量 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{E}$ 的方程。这种关系与导体的性质有关。在大多数的情况下，可以假定它是綫性关系(欧姆定律)。

如果导体是均匀和各向同性的，则这种綫性的依賴关系变成为簡单的比例关系:

$$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}. \tag{20.3}$$

系数 σ 依賴于导体的性质和状态，称为电导系数，或簡称为导体的电导率。

在均匀导体內，$\sigma=$常数；把(20.3)式代入(20.1)式，得到

① 在这一章內，我們不討論电流所产生的磁場，因而也不考虑磁場对电流的反作用。要考虑这种影响，必須使电流密度的定义精确化，这将在§29內进行。

$\operatorname{div}\mathbf{E}=0$。因此，在这种情况下，电場的势滿足拉普拉斯方程 $\Delta\varphi=0$。

在两种导电媒质的分界面上，电荷密度的法向分量显然必須为連續的。此外，按照电場强度的切向分量为連續的普遍条件[由 $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$ 得出，試比較(1.7)和(6.9)式]，比值 $\frac{\mathbf{j}}{\sigma}$ 也应为連續的。于是，电流密度的边界条件为

$$j_{n1}=j_{n2},\quad \frac{\mathbf{j}_{t1}}{\sigma_1}=\frac{\mathbf{j}_{t2}}{\sigma_2} \tag{20.4}$$

或者电場强度的边界条件为

$$\sigma_1 E_{n1}=\sigma_2 E_{n2},\quad \mathbf{E}_{t1}=\mathbf{E}_{t2} \tag{20.5}$$

在导体和非导电媒质的分界面上，簡单地有 $j_n=0$ 或 $E_n=0$①。

維持电流的电場对在导体內运动的电荷（載流子）作机械功，1秒內在单位体积內所作的功，显然等于 $\mathbf{jE}$ 的乘积。这功在导体的物质內轉变成热而消失掉。因此，在均匀导体的单位体积內，在1秒內所放出的热量等于

$$\mathbf{jE}=\sigma E^2=\frac{j^2}{\sigma} \tag{20.6}$$

(即**焦耳-楞茨定律**)。

热的放出使导体的熵增加，如果放出的热量为 $dQ=\mathbf{jE}dV$，則体积元的熵增加 $\frac{dQ}{T}$。因此，物体总熵的变化速度等于

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt}=\int\frac{\mathbf{jE}}{T}dV. \tag{20.7}$$

---

① 我們注意到方程 $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$，$\operatorname{div}(\sigma\mathbf{E})=0$，并注意到它們的边界条件(20.5)，在形式上和电介质內的靜电場方程相似，所不同的地方只是用 σ 代替了 ε。根据这些情况，可以由直接解相似的靜电学問題，求出无限导电媒质內电流分布問題的解。但存在导体和非导电媒质的分界面时，由这种相似性达不到上述的目的，因为在靜电学問題中，不存在 $\varepsilon=0$ 的媒质。

由于熵增加原理，这个导数必须为正值。把 $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ 代入上式，我們看到，从这个要求可以得出电导率 σ 为正值的結論。

在各向异性物体（单晶体）內，矢量 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{E}$ 的方向，一般說来不是相合的，它們之間的綫性关系可用下式表示为

$$j_i=\sigma_{ik}E_k, \tag{20.8}$$

式中量 σ_{ik} 构成二秩的对称張量（見后）（电导率張量）。

这里还必須作下列說明。晶体的对称性容許在 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{E}$ 的綫性关系中存在一自由項，也即是有下列形状的式子

$$j_i=\sigma_{ik}E_k+j_i^{(0)}$$

而矢量 $\mathbf{j}^{(0)}$ 为常数。这一項的存在表明导体具有压电性质——即沒有电流通过（$\mathbf{j}=0$）时导体內存在不为零的电場。但是，实际上，由于熵增加原理，这是不可能的，因为在(20.7)的被积式內，$\mathbf{j}^{(0)}\mathbf{E}$ 項显然有两个正負号，因而，$\dot{\mathscr{S}}$ 不可能为实在正值。

在各向同性媒质內，从 $\dot{\mathscr{S}}>0$ 的条件，可得到 σ 为正值，与此相似，在各向异性物体內，从这个条件也可以得到張量 σ_{ik} 的主值为正值的結論。

独立的張量分量的数目与晶体对称性的依賴关系，和任何二秩的对称張量完全一样（参閱 § 13）：在双軸晶体中，三个主值各不相同，在单軸晶体內，二个主值相同，而在立方晶体內，三个主值全同，也即是立方晶体的导电性质和各向同性物体完全一样。

导电率張量的对称性

$$\sigma_{ik}=\sigma_{ki} \tag{20.9}$$

是从所謂动力系数对称原理得出的必然結果。这个普遍原理是由 Л. 昂塞格提出的，为了便于本节和下面各节（§§ 25, 26）应用，表述如下①。

---

① 参閱"統計物理学"，第 3 版 § 118, 1951；"連續介质力学"，第 2 版，§58, 1953。

設 x_1, x_2……是表征物体每一点的状态的量。除此之外，我們引入量

$$X_a = -\frac{\partial S}{\partial x_a}, \tag{20.10}$$

式中 S 为物体单位体积的熵，取导数时假設这体积內的能量不变。在接近于平衡的状态下，量 x_a 接近于其平衡状态的值，而 X_a 則很小。这时物体內发生一种过程，趋向于使物体回到平衡状态。量 x_a 在这些过程中的变化速度，通常可以这样来推断：即在物体內的每一点处，它們只是这些点处的量 x_a（或 X_a）的函数。把这些函数展开成 X_a 的冪級数，并限于取展开式內的綫性項，于是得到下面的关系式：

$$\frac{\partial x_a}{\partial t} = -\sum_b \gamma_{ab} X_b. \tag{20.11}$$

因而，可以断言，系数 γ_{ab}（称为动力系数）对下角标 a 和 b 是对称的：

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \tag{20.12}$$

要实际应用这一原理，必須用某种方法选定量 x_a（或它們的导数 $\dot{x}_a$），然后求出相应的 X_a。我們利用物体总熵随时間变化的速度公式，通常可以很簡单地解决这一問題：

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = -\int \sum_a X_a \frac{\partial x_a}{\partial t} dV, \tag{20.13}$$

式中的积分对物体的全部体积进行。

在现在的情况下，导体內有电流流过，因此我們得到这一速度公式为(20.7)式。把这式子和(20.13)式比較，我們看到，如果取电流密度矢量 $\mathbf{j}$ 的分量作为 $\dot{x}_a$ 量，則量 X_a 为矢量 $-\frac{\mathbf{E}}{T}$ 的分量。比較(20.8)和(20.11)式指出，这时动力系数就是电导率張量分量乘上 T，于是这一張量的对称性可从普遍关系式(20.12)直接得出。

例　　题

1. 設在导电媒质內有一电极系，其电势保持为 φ_a。每一电极通过电流 J_a，試求1秒內媒质所放出的总焦耳热。

解. 所求的焦耳热 Q 由下列积分得出

$$Q=\int \mathbf{j}\mathbf{E}\,dV=-\int \mathbf{j}\nabla\varphi\,dV=-\int \operatorname{div}(\varphi\mathbf{j})dV,$$

式中的积分对媒质的整个体积进行。把这积分变换成面积分，并考虑到在媒质的外边界上，$j_n=0$，而在电极的表面，$\varphi=$常数$\equiv\varphi_a$。于是得到

$$Q=\sum_a \varphi_a J_a.$$

2. 設有电流 J 从导电球的一极流入，从另一极流出，試求导电球內的电势分布。

解. 在极点 O 和 O' 附近(图 14)，电势分别为

$$\varphi=\frac{J}{2\pi\sigma}\frac{1}{R_1} \text{ 和 } \varphi=-\frac{J}{2\pi\sigma}\frac{1}{R_2},$$

式中 R_1，R_2 是至两极点的距离。这些函数满足拉普拉斯方程，而积分 $-\sigma\int\nabla\varphi\cdot d\mathbf{f}$ 对包圍 O 和 O' 点的无限小的半球积分，等于 $\pm J$。在球內任意点 P 处的电势为

$$\varphi=\frac{J}{2\pi\sigma}\left\{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\psi\right\},$$

式中 ψ 是拉普拉斯方程的解，它在球內和球面上沒有极点。从对称性看出，ψ(和 φ 一样)只是球面坐标 r 和 θ 的函数。

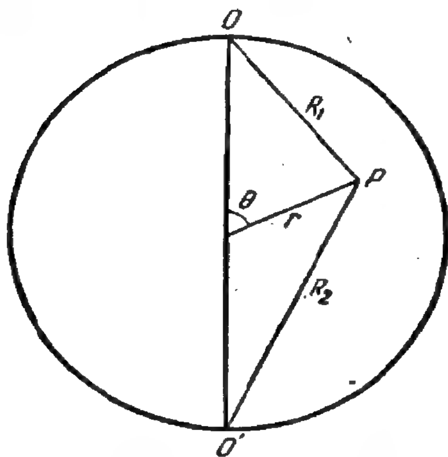


图　14

在球面上($r=a$)，必須$\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=0$。

取微分后，由此求得 ψ 的边界条件为

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right), \quad \text{当 } r=a.$$

如果 $f(r,\theta)$是拉普拉斯方程的某一个解，则函数 $\int_0^r \frac{f(r,\theta)}{r}dr$ 也是它的一个

解①。与上述的边界条件比較，容易得出，滿足它的解为

$$\psi=\frac{1}{2}\int_{0}^{r}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\frac{dr}{r}.$$

代入 $R_{1,2}=\sqrt{a^2+r^2\mp 2ar\cos\theta}$，并进行积分后，最后得到

$$\varphi=\frac{J}{2\pi\sigma}\left\{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{2a}\left(\operatorname{Arsh}\frac{a+r\cos\theta}{r\sin\theta}-\operatorname{Arsh}\frac{a-r\cos\theta}{r\sin\theta}\right)\right\}.$$

3. 試证明，导电媒质内的电流分布相应于能量的极小弥散。

解. 这里所指的是在表示电荷守恒的附加条件 $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$ 下求出积分 $\int \mathbf{jE}\,dV=\int\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}dV$ 的极小值。将下列积分对 $\mathbf{j}$ 取变分：

$$\int\left(\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}-2\varphi\operatorname{div}\mathbf{j}\right)dV$$

(2φ 是拉格朗日未定因子)，并令这变分等于零，于是得到方程 $\mathbf{j}=-\sigma\nabla\varphi$，或者

$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{j}}{\sigma}=0,$$

这个式子与(20.2)和(20.3)式相同。

§ 21. 霍耳效应

如果导体在外磁場 $\mathbf{H}$ 内，則电流密度和电場强度之間的关系，和前面一样，由下列关系式給出：

$$j_i=\sigma_{ik}E_k,$$

但是电导率張量 σ_{ik} 的分量是 $\mathbf{H}$ 的函数，而且尤其重要的是，它对下角标 i 和 k 已經不是对称的。在 § 20 中，我們曾从动力系数的对称性原理出发，证明了这个張量的对称性质。但是大家知道，在磁場內，这个原理的表述形式稍有改变：当动力系数的下角标交换

① 这一点是很容易证明的，无論利用直接驗算，或者根据下列情况，即拉普拉斯方程任何只与变数 r 和 θ 有关的解 $f(r,\theta)$ 都可写成下列形式：

$$f=\sum_{n}c_n r^n P_n(\cos\theta),$$

式中 c_n 为常数，而 P_n 为勒让特多項式。

位置时，磁場方向也必須改变为反方向①。因此，对于張量$\sigma_{ik}(\mathbf{H})$的分量，我們現在得到关系式:

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H})=\sigma_{ki}(-\mathbf{H}). \tag{21.1}$$

量$\sigma_{ik}(\mathbf{H})$和$\sigma_{ki}(\mathbf{H})$互不相等。

和普通的二秩張量一样，張量σ_{ik}也可以分成对称的和反对称的两部分，我們分别用s_{ik}和a_{ik}来表示:

$$\sigma_{ik}=s_{ik}+a_{ik}. \tag{21.2}$$

按照定义，

$$\left.\begin{aligned}s_{ik}(\mathbf{H})&=s_{ki}(\mathbf{H}),\\ a_{ik}(\mathbf{H})&=-a_{ki}(\mathbf{H}),\end{aligned}\right\} \tag{21.3}$$

但从(21.1)得出，

$$\left.\begin{aligned}s_{ik}(\mathbf{H})&=s_{ki}(-\mathbf{H})=s_{ik}(-\mathbf{H}),\\ a_{ik}(\mathbf{H})&=a_{ki}(-\mathbf{H})=-a_{ik}(-\mathbf{H}).\end{aligned}\right\} \tag{21.4}$$

由此可見，張量s_{ik}的分量是磁場的偶函数，而張量a_{ik}的分量則是磁場的奇函数。

大家知道，任何二秩的反对称張量a_{ik}，等效于某一軸矢量，这軸矢量和它的分量的关系式为

$$a_{xy}=a_z,\quad a_{xz}=-a_y,\quad a_{yz}=a_x, \tag{21.5}$$

利用这个矢量，可以把乘积$a_{ik}E_k$的分量写成矢积$[\mathbf{Ea}]$的分量:

$$j_i=\sigma_{ik}E_k=s_{ik}E_k+[\mathbf{Ea}]_i. \tag{21.6}$$

电流流过时所放出的焦耳热，由乘积$\mathbf{jE}$得出。由于矢量$[\mathbf{Ea}]$和$\mathbf{E}$是相互正交的，因而它們的乘积恒为零，于是

$$\mathbf{jE}=s_{ik}E_iE_k \tag{21.7}$$

也即是焦耳热只决定于导电率張量的对称部分（$\mathbf{E}$的强度保持不变）。

① 参閱"統計物理学"第三版，§118。

外磁場大半可以假定为弱場；于是电导率張量分量可以展开为H的冪級数。由于函数a(H)是奇次的，因此在这个張量的展开式內只包含奇次冪的項。展开式的头几項是磁場的綫性項，即具有下列形式：

$$a_i = \alpha_{ik} H_k. \tag{21.8}$$

矢量 a 和 H 都是軸矢量；因此常数 α_{ik} 构成一个普通（极）張量。在偶函数 $s_{ik}(\mathbf{H})$的展开式內，只包含偶次冪的項。展开式的第一項是磁場不存在时的电导率 $\sigma_{ik}^{(0)}$，而头几个修正項是場的二次項：

$$s_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + \beta_{iklm} H_l H_m. \tag{21.9}$$

張量 β_{iklm} 无論对下角标 i, k 或下角标 l, m 而言，都是对称的。

因此，磁場的主要效应是場的綫性項[Ea]（称为霍耳效应）。如我們看到的，这一效应是在与电場垂直的方向上产生电流，其数值与磁場强度成正比。但是应該注意的是，在任意的各向异性媒质的普遍情况下，霍耳电流并不是唯一与E垂直的电流，非霍耳电流 $s_{ik}E_k$ 也可能有这种方向的分量。

对霍耳电流还可以有另一个看法，这是从用电流密度表示电場E的逆公式而得出的：

$$E_i = \sigma_{ik}^{-1} j_k.$$

逆張量 σ_{ik}^{-1} 和張量 σ_{ik} 一样，可以分为对称部分（我們用 ρ_{ik} 表示）和反对称部分，后者与一軸矢量 b 等效：

$$E_i = \rho_{ik} j_k + [\mathbf{jb}]_i. \tag{21.10}$$

張量 ρ_{ik} 和矢量 b 的性质与 s_{ik} 和 a 的相同。特别是在弱場的情况下，矢量 b 对磁場而言是綫性的。在(21.10)式內，霍耳效应由[jb]項表示，也即是产生和电流垂直的电場，其数值与磁場（和电流 j）成正比。

如果导体是各向同性的，则上面得到的全部关系式可以大大

地簡化。在这种情况下，根据对称性可明显地看出，矢量 $\mathbf{b}$(或 $\mathbf{a}$)的方向必須平行于磁場方向。張量 ρ_{ik} 的唯一不为零的分量是 $\rho_{xx}=\rho_{yy}$ 和 ρ_{zz}，此处选擇 z 軸方向为磁場方向。我們用 $\rho_\perp$ 和 $\rho_\parallel$ 来表示这两个分量，并选擇 xz 平面通过电流方向，于是得到

$$E_x=\rho_\perp j_x,\quad E_y=-bj_x,\quad E_z=\rho_\parallel j_z. \tag{21.11}$$

由此看出，在各向同性导体內，霍耳电場是唯一的同时垂直于电流和磁場的电場。

在弱磁場內，矢量 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{H}$ 的关系(在各向同性导体內)簡单地由下式給出:

$$\mathbf{b}=-R\mathbf{H}. \tag{21.12}$$

常数 R 称为霍耳常数，既可以为正值，也可以为負值。在 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{j}$ 的关系式內的 H 的二次項形式(通过張量 ρ_{ik} 包含在关系式內)，可以从 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{H}$ 所組成的唯一矢量是 $\mathbf{H}(\mathbf{jH})$ 和 $\mathbf{j}H^2$(对 $\mathbf{j}$ 为綫性的和对 $\mathbf{H}$ 为二次的)明显地看出。因此，在各向同性导体內，考慮到 $\mathbf{H}$ 的二次項，$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{j}$ 的普遍关系式为

$$\mathbf{E}=\rho^{(0)}\mathbf{j}+R[\mathbf{Hj}]+\beta_1\mathbf{j}H^2+\beta_2\mathbf{H}(\mathbf{Hj}). \tag{21.13}$$

例 題

試用 s_{ik} 和 $\mathbf{a}$ 的分量来表示逆張量 σ^{-1}_{ik} 的分量。

解. 最簡单的是选擇坐标系 x, y, z 进行計算，其中坐标軸为張量 s_{ik} 的主軸，然后根据所得到的表达式的形式，很容易得到它們在任何坐标系內的普遍形式。張量的行列式为

$$|\sigma|=\begin{vmatrix} s_{xx} & a_z & -a_y \\ -a_z & s_{yy} & a_x \\ a_y & -a_x & s_{zz}\end{vmatrix}=s_{xx}s_{yy}s_{zz}+s_{xx}a_x^2+s_{yy}a_y^2+s_{zz}a_z^2.$$

显然，在普遍情况下，

$$|\sigma|=|s|+s_{ik}a_ia_k.$$

組成这个行列式的子式，于是得到逆張量的分量为

$$\sigma_{xx}^{-1}=\rho_{xx}=\frac{s_{yy}s_{zz}+a_x^2}{|\sigma|},$$

$$\sigma_{xy}^{-1}=\rho_{xy}+b_z=\frac{a_xa_y-a_zs_{zz}}{|\sigma|},\cdots$$

变换到我們所选擇的坐标系的普遍表达式为

$$\rho_{ik}=\frac{1}{|\sigma|}\left\{s_{ik}^{-1}|s|+a_ia_k\right\},$$

$$b_i=-\frac{1}{|\sigma|}s_{ik}a_k,$$

由此即可以解出所提出的問題。

§ 22. 接触电势差

为了使带电粒子从导体表面脱离出来，必須对它作一定的功。如果带电粒子是用热力学可逆方式脱出的，则必須对粒子作功，这功称为**脱出功**。这个量总是正值，我們从点电荷被吸向一切中性物体，其中也包括导体，可以直接得出这一点（参閱 §14）。下面把这功化为单位（正）电荷的功更为方便。由这样定出的“脱出势”W的正負号，和被脱出粒子的电荷的正負号相同。

脱出功既依賴于导体的种类（及其热力学状态——溫度、密度），也依賴于带电粒子的种类。例如，在同一种金屬內，傳导电子或离子从金屬表面脱出时，脱出功各不相同。还必須着重指出，脱出功是表征导体表面特性的一个量，而不是表征导体体积性质的量。因此，脱出功例如也与加工方式和沾染程度有关。如果导体是单晶体，则在不同的棱上脱出功也不相同。

为了闡明脱出功依賴于导体表面特性的物理性质，我們来研究脱出功与物质表面层的电結构的关系。把 $\rho(x)$ 了解为未对 x 軸方向的物理无限小长度元取平均值的电荷密度（x 軸垂直于层面），于是我們可以写出表面层內的泊松方程为

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=-4\pi\rho.$$

設导体的区域相应于 $x<0$。积分一次，得到

$$\frac{d\varphi}{dx}=-4\pi\int_{-\infty}^{x}\rho dx,$$

然后进行分部积分:

$$\varphi-\varphi_{-\infty}=-4\pi x\int_{-\infty}^{x}\rho dx+4\pi\int_{-\infty}^{x}x\rho dx.$$

当 $x\to\infty$ 时，积分 $\int_{-\infty}^{x}\rho dx$ 迅速趋向于零(由于未带电导体表面是电中性的)。因此，

$$\varphi(+\infty)-\varphi(-\infty)=4\pi\int_{-\infty}^{+\infty}x\rho dx.$$

等式右边的积分代表分布于导体表面附近的电荷的偶极矩。这种分布具有“双层”的特征，其中正負号相反的电荷分开，使电荷系的偶极矩不为零。当然，双层的結构与表面的性质(它的晶軸方向、污染程度等)有关。給定导体的不同表面上的脫出势之差，决定于它們的偶极矩之差。

如果使两种不同的导体互相接触，則它們之間发生带电粒子的交換。这时电荷将从脫出功小的导体轉移到脫出功大的导体上，一直到两导体之間建立了电势差阻止电荷的轉移为止——这种电势差称为接触电势差。

图 15 所示是两种互相接触的导体(a 和 b)在其自由表面 AO 和 OB 附近的横剖面图。两表面上的电势分别用 φ_a 和 φ_b 表示；接触电势差为 $\varphi_{ab}=\varphi_b-\varphi_a$。由热力学平衡条件，可以求出电势差和脫出功之間的定量关系。假設把一个电荷为 e 的粒子，从导体 a 內通过表面 AO 取出，然后又把它移到表面 OB 上，最后带到导体 b 內，我們来研究这时对該粒子所作的功；在热力学平衡状态下，

这功应等于零①。在上面所指出的三个步驟中，对粒子所作的功分别等于 eW_a, $e(\varphi_b-\varphi_a)$ 和 $-eW_b$。令它們的总和等于零，我們得到所求的关系式为

$$\varphi_{ab}=W_b-W_a. \tag{22.1}$$

由此可見，两个导体互相接触时，相邻两自由面間的接触电势差，等于它們的脫出电势差。

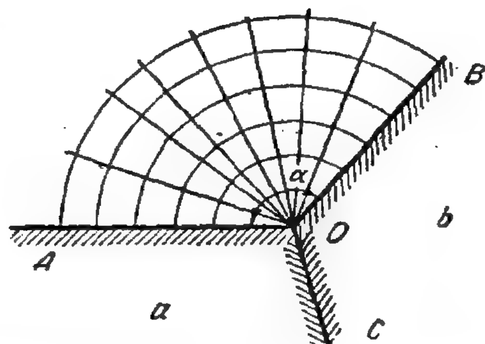


图 15

接触电势差的存在，使在导体外的空間內出現电場。求出接触点附近的电場值并不困难。在交綫附近的小区域內(图 15 內的 O 点)，可以把两个导体的相交面看作平面。于是导体外的場势滿足方程:

$$\Delta\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0$$

(r, θ 为极坐标，其原点在 O 点)，而在 AO 和 OB 面上，場势必須取給定的恒定值。这时我們感兴趣的解是包括 r 的最低冪的解，它代表場势展开成小距离 r 的冪級数內的主要項。于是这解为 $\varphi=$ $=$常数$\cdot\theta$。θ 角从 AO 边算起，并令場势等于零，于是得到

$$\varphi=\frac{\varphi_{ab}}{\alpha}\theta, \tag{22.2}$$

式中 α 为 $\angle AOB$。由此可見，等势綫(在图平面內)是从 O 点发出的直綫，相应地，电力綫是以 O 点为中心的一族圓弧。电場强度等于

$$E=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\frac{\varphi_{ab}}{\alpha}\frac{1}{r}, \tag{22.3}$$

① 不言而喻，实际上，粒子只是通过它們的接触面，而不是通过它們周圍的空間从一导体过渡到另一导体內。但是，我們在这里利用了这过渡功和路程无关这一点。

也即是电場强度随至 O 点的距离成反比地减小。

如上面所指出的，在金屬单晶体的各面之間也存在“接触”电勢差。因此，在晶棱附近，也必須存在上面所指出的性质的电場[①]。

如果把許多金屬导体（在相同溫度下）依次連結起来，則在最边緣的导体之間的电勢差，簡单地等于它們的脫出电勢差[这根据(22.1)式很容易得出]，和两种直接接触的导体的情况完全一样。特別是，如果电路两端是相同的金屬，則它們之間的电勢差等于零。这种情况是很明显的，因为如果在相同导体之間存在电勢差，那末当电路接通时就会有电流产生，这是和热力学第二定律矛盾的。

§23. 伽伐尼电池

如果电路內是載流子的种类不相同的导体（金屬和电解溶液），則上节末所作的說明就失去意义。由于同一种导体对于不同带电粒子的（电子和离子）脫出功也是不同，因此，即使电路两端是相同的导体，这时电路內的总接触电勢差也不为零。这种总电勢差称为电路內的电动勢，它不外是閉合电路两端两相同导体間的电勢差。当这种电路接通时就会有电流流过。伽伐尼电池的工作，就是根据这一原理。这时維持电路內电流的能量源，是电池內发生的化学变化。

繞通过閉合电路內的任何閉合迴路一周，当然，电場勢应回到它的起始值，也即是它的总变化等于零。例如，我們来研究导体面上的某一迴綫。当从一种导体过渡到另一种导体时，电勢发生突变 φ_{ab}。若导体內有电流 J（通过截面的总电流）流过，則每一导体上的电勢降等于 RJ，R 是导体的电阻。因此，电路內电勢的总变

① 在实际条件下，由于从大气內“聚集”在表面的离子所产生的电場，抵銷了这些場。

化等于

$$\Sigma\varphi_{ab}-\Sigma JR.$$

令这个表达式等于零，幷注意到在全电路內的电流 J 不变，而总和 $\Sigma\varphi_{ab}$ 为电动势 $\mathscr{E}$，我們得到

$$J\Sigma R=\mathscr{E}, \tag{23.1}$$

因此，接有伽伐尼电池的电路內的电流，等于电动势除以电路內全部导体的总电阻（当然也包括电池本身的內电阻）。

虽然，伽伐尼电池的电动势也可以表示为接触电势差之和，但要着重指出的是，实际上，这是一个完全由导体的体积状态所确定的热力学量，幷且和导体分界面的性质完全无关。这是很明显的，因为 $\mathscr{E}$ 恰好是将带电粒子反向沿全部閉合电路移动所作的功（屬于单位电荷）。

为了举例說明这种情况，我們来研究由两个金屬电极（金屬 A 和 B）浸在电解溶液 AX 和 BX（X^- 为某种負离子）內所构成的伽伐尼电池。設 ζ_A 和 ζ_B 是金屬 A 和 B 的化学势，而 ζ_{AX} 和 ζ_{BX} 是溶液內电解质的化学势①。元电荷 e 繞閉合电路运动，表示离子 A^+ 从电极 A 进入溶液內，而离子 B^+ 从溶液进入电极 B 內，而且电极上的电荷变化，由沿外电路部分从电极 A 进入电极 B 的电子来补偿。这些过程的結果是：电极 A 失去一个中性原子，电极 B 得到一个中性原子，而在电解溶液內，BX 的一个分子为 AX 的一个分子所取代。因为可逆过程中所作的功（溫度、压强保持不变）等于系統的热力学势的变化，因此我們得到下列关系式：

$$e\mathscr{E}_{AB}=(\zeta_B-\zeta_{BX})-(\zeta_A-\zeta_{AX}), \tag{23.2}$$

伽伐尼电池的电动势可用电极材料和电解溶液的体积性质来表示。

① 这一节內采用了对一个粒子的通常的化学势定义。

由(23.2)的形式也可得到下面的推論。如果溶液內有三种电解质(AX、BX、CX),其中浸有三种金屬电极 A、B、C,则在它們每两种电极之間的电动势,由下列关系式联系起来:

$$\mathscr{E}_{AB}+\mathscr{E}_{BC}=\mathscr{E}_{AC}. \tag{23.3}$$

利用普遍的热力学关系式,可以把伽伐尼电池的电动势和电路內电流流过时所发生的热效应联系起来,不言而喻,在实际条件下,电流的流过是不可逆的。設 Q 为单位电荷通过时所放出的热量(在电池內和外电路內);这热量不外是当电流流过时在伽伐尼电池內所发生的热化学反应热。按照熟知的热力学公式①,它和功 $\mathscr{E}$ 的关系为

$$Q=-T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mathscr{E}}{T}\right). \tag{23.4}$$

上式內对温度的偏导数的求法,取决于在何种条件下发生这种过程,例如,如果压强不变时流过电流(如通常的情况),则保持压强不变进行微分。

§24. 电毛細現象

在两种导电媒质的交界面上所存在的电荷,影响到交界面上的表面張力;这种現象称为**电毛細現象**,实际上,这里所指的是两种液态媒质——通常是指液体金屬(水銀)与电解质溶液的界面而言。

我們用 φ_1 和 φ_2 表示两种导体的电势,用 e_1 和 e_2 表示分布于它們的分界面上的电荷。这些电荷数值相等而正負号相反。这样一来,就在交界面上形成所謂"双层"。

假設保持压强和温度不变,并考虑到两种导体的分界面,于是得到这种系統的电势 $\mathscr{T}$ 的微分为

---

① 参閱"統計物理学",第三版,§89。

$$d\widetilde{\mathscr{P}}=\alpha dS-e_1d\varphi_1-e_2d\varphi_2. \tag{24.1}$$

αdS 这一項代表分界面的面积 S 上的可逆变化 dS 所作的功（α 为表面張力系数）①。

在(24.1)式中，代替热力学势$\widetilde{\mathscr{P}}$，我們可以只写下它的“表面部分”$\widetilde{\mathscr{P}}_s$，因为当压强和溫度不变时，体积部分保持不变，因而我們不感兴趣。令 $e_1=-e_2\equiv e$，并引进电势差 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$，于是可以把(24.1)式改写为

$$d\widetilde{\mathscr{P}}_s=\alpha dS-ed\varphi. \tag{24.2}$$

由此得到

$$\left(\frac{\partial\widetilde{\mathscr{P}}_s}{\partial S}\right)_\varphi=\alpha, \tag{24.3}$$

同时 α 可表示为 φ 的函数。对上式积分，我們得到 $\widetilde{\mathscr{P}}_s=\alpha S$。把这个式子再代入(24.2)式，得到$d(\alpha S)=\alpha dS-ed\varphi$或$Sd\alpha=-ed\varphi$，由此得

$$\sigma=-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\right)_{p,T}, \tag{24.4}$$

式中 $\sigma=\frac{e}{S}$，为单位面上的电荷。(24.4)式（由李普曼和吉布斯最先得到）是电毛細管現象理論的基本方程。

在平衡状态下，当导体的电势保持給定值时，热力学势$\widetilde{\mathscr{P}}$必須为极小值。把热力学势看作表面电荷 e 的函数，于是$\widetilde{\mathscr{P}}$取极小值的必要条件为

$$\frac{\partial\widetilde{\mathscr{P}}_s}{\partial e}=0,\quad \frac{\partial^2\widetilde{\mathscr{P}}_s}{\partial e^2}>0, \tag{24.5}$$

式中求导数时保持面积 S 不变。为了算出导数值，我們用热力学势 $\mathscr{P}_s=\mathscr{P}_s(e)$ 表示 $\widetilde{\mathscr{P}}_s$:

$$\widetilde{\mathscr{P}}_s=\mathscr{P}_s(e)-e_1\varphi_1-e_2\varphi_2=\mathscr{P}_s(e)-e\varphi. \tag{24.6}$$

① 参閱“統計物理学”第三版，§ 135。

由一次导数等于零的条件給出

$$\frac{\partial\widetilde{\mathscr{P}}_s}{\partial e}=\frac{\partial\mathscr{P}_s{}'}{\partial e}-\varphi=0,$$

然后二次导数为正值的条件为

$$\frac{\partial^2\widetilde{\mathscr{P}}_s}{\partial e^2}=\frac{\partial^2\mathscr{P}_s}{\partial e^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial e}=\frac{1}{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}>0,$$

或者

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}>0. \tag{24.7}$$

如果把表面上的“双层”看成电容为$\frac{\partial e}{\partial\varphi}$的“电容器”，则这条件正是所預期的。

将等式(24.4)对 φ 取微分，并利用(24.7)式，我們得到

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varphi^2}<0. \tag{24.8}$$

这表明，在$\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}=-\sigma=0$的点处，$\alpha$ 和 φ 的关系曲綫有极大值。

§25. 温差电現象

金屬內不存在电流的条件是对傳导电子存在热力学平衡。大家知道，这一条件除了要求温度不变外(在整个导体上)，还要求 $e\varphi+\zeta_0$ 也保持不变，式中 ζ_0 是金屬內傳导电子的化学势(保持 $\varphi=0$)①。如果导体是組分不均匀的金屬，那末，即使温度保持不变，ζ_0 也会沿导体发生变化。因此，在这种情况下，电势 φ 不变不会使金屬內的电流为零，虽然場强 $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\varphi$ 也等于零。如果我們希望把不均匀导体也考虑进去，那末这种情况使得通常的 φ 的定义感到不便(把它作为对点源平均的結果)。

① 参閱“統計物理学”第三版，§25，我們在这里把 ζ 理解为通常屬于一个粒子(电子)的化学势。

因此取 $\varphi+\frac{\zeta_0}{e}$ 之和作为电势的新定义，是很自然的事，下面我們将簡单地把它表示为 φ①。在均匀金屬內，这种定义的改变导致在电势上添上一个不重要的常数。与此相应，"場强" $\mathbf{E}=-$ $-\operatorname{grad}\varphi$（我們下面也将用它）只在均匀金屬內才和实在的平均場强相等，而在一般情况下，它們之間相差某一状态函数的陡度。

根据这一定义，在热力学平衡状态下，对傳导电子而言，場强和电流都变为零，而 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{E}$ 的关系将为 $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}(j_i=\sigma_{ik}E_k)$，即使金屬的組分是不均匀的。

現在，我們来研究金屬受到不均匀加热的情况，这在任何情况下都不会有（电子的）热力学平衡。于是，即使沒有电流，电場强度 $\mathbf{E}$ 也不为零。在电流密度 $\mathbf{j}$ 和溫度陡度 ∇T 不为零的普遍情况下，这些量和場强的关系可以写为

$$\mathbf{E}=\frac{1}{\sigma}\mathbf{j}+\alpha\nabla T, \tag{25.1}$$

式中 σ 为通常的电导率，而 α 是表征金屬电性质的一个量。为簡单起見，我們假定物质是各向同性的（或具有立方对称），为此，我們把比例系数写成标量形式。$\mathbf{E}$ 和 ∇T 的綫性关系，不言而喻，只代表展开式的第一项，但由于溫度陡度很小，这一項是完全足够的（实际上經常如此）。

把(25.1)式写成下面的形式：

$$\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}-\alpha\nabla T), \tag{25.2}$$

这表明，在不均匀受热的金屬內，即使場强 $\mathbf{E}$ 为零，也可以有电流流过。

除了电流密度 $\mathbf{j}$ 外，我們也可以研究能流密度，我們用 $\mathbf{q}$ 表示

① 这定义也可表达成另一种形式，即 $e\varphi$ 的新数值为把一个电子等温地引入金屬所引起的自由能的变化；换句話說，$\varphi=\frac{\partial F}{\partial\rho}$，式中 F 为金屬的自由能，而 ρ 为单位体积內导电电子的电荷。

它。首先，从能流内分出$\varphi\mathbf{j}$，这是因为每一带电粒子(电子)本身携带能量$e\varphi$。但是$\mathbf{q}-\varphi\mathbf{j}$之差却与电势本身无关，因此，在普遍情况下，可以把它表示成陡度$\nabla\varphi=-\mathbf{E}$和$\nabla T$的綫性函数，和电流密度的公式(25.2)相似。現在把这个式子写成

$$\mathbf{q}-\varphi\mathbf{j}=\beta\mathbf{E}-\gamma\nabla T.$$

由动力学系数的对称性原理，可以得到系数β和(25.2)式内的系数α的关系式。

为此，我們計算导体的总熵的变化速度。在单位时間内导体单位体积内放出的热量为$-\operatorname{div}\mathbf{q}$，因此可以写成

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt}=-\int\frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{T}dV.$$

其次，利用方程$\operatorname{div}\mathbf{j}=0$，我們写出

$$\frac{1}{T}\operatorname{div}\mathbf{q}=\frac{1}{T}\{\operatorname{div}(\mathbf{q}-\varphi\mathbf{j})+\operatorname{div}\varphi\mathbf{j}\}=$$
$$=\frac{1}{T}\operatorname{div}(\mathbf{q}-\varphi\mathbf{j})-\frac{\mathbf{Ej}}{T}.$$

第一項經过分部积分后，我們得到

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt}=\int\frac{\mathbf{Ej}}{T}dV-\int\frac{(\mathbf{q}-\varphi\mathbf{j})\nabla T}{T^2}dV. \tag{25.3}$$

这个式子指明，如果选擇矢量$\mathbf{j}$和$\mathbf{q}-\varphi\mathbf{j}$的分量作为量$\frac{\partial x_a}{\partial t}$(参閱§20)，則相应的量$X_a$即为矢量$-\frac{\mathbf{E}}{T}$和$\frac{\nabla T}{T^2}$的分量。与此相应，在下列关系式

$$\mathbf{j}=\sigma T\frac{\mathbf{E}}{T}-\sigma\alpha T^2\frac{\nabla T}{T^2},$$
$$\mathbf{q}-\varphi\mathbf{j}=\beta T\frac{\mathbf{E}}{T}-\gamma T^2\frac{\nabla T}{T^2}$$

內，系数$\sigma\alpha T^2$和βT必須相等。

由此可見，$\beta=\sigma\alpha T$，于是我們得到

$$\mathbf{q}-\varphi\mathbf{j}=\sigma\alpha T\mathbf{E}-\gamma\nabla T.$$

最后，按照(25. 1)式，用 $\mathbf{j}$ 和 ∇T 表示这里的 $\mathbf{E}$，于是最后得到下面的表达式:

$$\mathbf{q}=(\varphi+\alpha T)\mathbf{j}-\kappa\nabla T, \tag{25. 4}$$

这里引进了符号 $\kappa=\gamma-T\alpha^2\sigma$。量 κ 不外是通常的热导系数，它定出电流不存在时的热流量。

应該指出，导数 $\frac{d\mathscr{S}}{dt}$ 为正値的条件，对于溫差电系数并不加上任何新的限制。把(25. 1)和(25. 4)式代入(25. 3)式，得到

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt}=\int\left(\frac{j^2}{\sigma T}+\frac{\kappa(\nabla T)^2}{T^2}\right)dV>0, \tag{25. 5}$$

由此只得到热导系数和电导系数为正的条件。

在上面写出的式子中，暗中假定了当溫度不变时压强（或密度)的不均匀不会引起导体內产生电場(或电流)；基于这一点，在(25. 2)和(25. 4)式內，沒有写下与 ∇p 成比例的項。实际上，这些項的存在与熵增加定律相矛盾，因为在(25. 5)式中被积式內的項包含乘积 $\mathbf{j}\nabla p$ 和 $\nabla T\nabla p$，它們可以有两个正負号，因而积分不一定为实在正值。

(25. 1)和(25. 4)的关系式本身包含了各种溫差电效应。我們来研究每秒內从导体单位体积內放出的热量 $-div\ \mathbf{q}$。由(25. 4)式取微分，我們得到

$$Q=-div\ \mathbf{q}=\operatorname{div}(\kappa\nabla T)+\mathbf{E}\mathbf{j}-\mathbf{j}\nabla(\alpha T),$$

或者把(25. 1)式代入上式，得到

$$Q=\operatorname{div}(\kappa\nabla T)+\frac{j^2}{\sigma}-T\mathbf{j}\nabla\alpha. \tag{25. 6}$$

这式子右側的第一項与純热导率有关，而第二項与电流的平方成正比，可以称为焦耳热。在这里，我們感兴趣的是第三項，它包含特殊的溫差电效应。

現在假定导体的組分是均匀的。于是量 α 的改变只与溫度陡

度有关，因而可以写为 $\nabla\alpha=\frac{d\alpha}{dT}\nabla T$；如果和通常的情况一样，导体上的压强不变，则 $\frac{d\alpha}{dT}$ 必須理解为导数 $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial T}\right)_p$ 由此可見，我們感兴趣的热量放出（称为湯姆逊效应）等于

$$\rho\mathbf{j}\nabla T,\ \text{其中}\ \rho=-T\frac{d\alpha}{dT}. \tag{25.7}$$

量 ρ 称为湯姆逊系数。应該注意的是，这种效应和电流的一次冪成正比，而不是和电流的二次冪成正比，和焦耳热一样。因此，当电流反向时，它也变号。系数 ρ 既可以是正的，也可以是負的。如果 $\rho>0$，則在溫度上升方向有电流流过时，湯姆逊热取正值（放出热量），而在反方向流过电流时，則吸收热量；如果 $\rho<0$，則关系倒过来。

如果电流通过两种不同金屬的接触点（接头），則发生另一种热效应，称为帕耳帖效应。在接触面上，溫度、电势以及电流密度和能流密度矢量的法向分量都是連續的。我們用下角标 1 和 2 分别表示屬于两种金屬的量，并令接触面两侧的 $\mathbf{q}$ (25.4) 的法向分量相等，由于 φ, T 和 j_x 的連續性，我們得到

$$\left(-\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_1^2=-j_xT(\alpha_2-\alpha_1);$$

这里取 x 軸为接触面的法綫方向。如果取 x 軸的正方向为从金屬 1 到金屬 2 的方向，則等式左边的表达式就是 1 秒內以热傳导方式从 1 厘米^2 接触面上导出的热量。这导出的热量补償接头上所放出的热量，这热量由等式右側的表达式表示。由此可見，接头每一单位面积所放出的热量（1 秒內）等于

$$\Pi_{12}j,\ \text{此处}\ \Pi_{12}=-T(\alpha_2-\alpha_1). \tag{25.8}$$

量 Π_{12} 称为帕耳帖系数。和湯姆逊效应一样，这效应也和电流的一次冪成正比，而当电流反向时变号。应該指出的是，帕耳帖系数

具有相加性，所表示为等式 $\Pi_{13}=\Pi_{12}+\Pi_{23}$，此处的下角标 1, 2, 3 分别指三种不同的金屬。

由比較(25.7)和(25.8)式指明，湯姆逊系数和帕耳帖系数間的关系式为

$$\rho_2-\rho_1=T\frac{d}{dT}\frac{\Pi_{12}}{T}. \tag{25.9}$$

其次，我們来研究有两个接头的开路电路，而且两端的导体为同一金屬(金屬 1，图 16)。假設接头(b 点和 c 点)的溫度不同，分别为 T_1 和 T_2，但电路两端(a 点和 d 点)的溫度一样。于是，在两端点之間有接触电势差，称为温差电动势，我們用 $\mathscr{E}_T$ 表示。为了算出温差电动势，假設(25.1)式中的 $\mathbf{j}=0$，并对电路的全长(x 軸)积分电場强度 $\mathbf{E}=\alpha\nabla T$，于是得到

a b c d
1 2 1
T_1 T_2

图 16

$$\mathscr{E}_T=\int_a^d \alpha\frac{dT}{dx}dx=\int_a^d \alpha dT.$$

从 c 到 d 和从 a 到 b 的积分，表明在第一种金屬内从溫度 T_2 积分到 T_1，而从 b 到 c 的积分表明在第二种金屬內，dT 从 T_1 积分到 T_2。因此，我們求得

$$\mathscr{E}_T=\int_{T_1}^{T_2}(\alpha_2-\alpha_1)dT. \tag{25.10}$$

与(25.8)式比較，我們看到，温差电动势和帕耳帖系数有如下的关系式:

$$\mathscr{E}_T=-\int_{T_1}^{T_2}\frac{\Pi_{12}}{T}dT. \tag{25.11}$$

公式(25.9)和(25.11)称为湯姆逊关系式。

末了，我們写出各向异性导体內的电流和热流量的公式。利

用动力系数对称原理，和推导(25.1)和(25.4)式完全相似，我們推导出这些公式为

$$E_i=\sigma^{-1}_{ik}j_k+\alpha_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_k}, \tag{25.12}$$

$$q_i-\varphi j_i=T\alpha_{ki}j_k-\kappa_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_k}.$$

式中 σ^{-1}_{ik} 是电导率張量 σ_{ik} 的逆張量；張量 σ_{ik} 和 κ_{ik} 是对称的。但在普遍情况下，温差电張量 α_{ik} 是非对称的。

例　　題

設同时存在电場、磁場以及温度陡度，試求当电流流过时所发生的各种温差电磁效应系数間的关系式。

解. 解法和正文內对温差电現象所进行的完全相似。在现在的情況下，直接把它写成張量形式較为便利，这样也可以应用到各向异性导体上。我們把电流密度 $\mathbf{j}$ 和热流密度 $\mathbf{q}$ 写为

$$j_i=a_{ik}\frac{E_k}{T}+b_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{T}\right),$$

$$q_i-\varphi j_i=c_{ik}\frac{E_k}{T}+d_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{T}\right), \tag{1}$$

式中全部系数都是磁場的函数。按照动力系数对称原理，我們得到

$$a_{ik}(\mathbf{H})=a_{ki}(-\mathbf{H}),\quad d_{ik}(\mathbf{H})=d_{ki}(-\mathbf{H}),$$

$$b_{ik}(\mathbf{H})=c_{ki}(-\mathbf{H}). \tag{2}$$

把用 $\mathbf{j}$ 和 ∇T 表示(1)式内的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{q}-\varphi\mathbf{j}$，我們得到

$$E_i=\sigma^{-1}_{ik}j_k+\alpha_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_k}, \tag{3}$$

$$q_i-\varphi j_i=\beta_{ik}j_k-\kappa_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_k},$$

式中的張量 $\sigma^{-1}, \alpha, \beta, \kappa$ 可以一定的方式用張量 a, b, c, d 来表示，同时从关系式(2)，它們具有下列的对称性质：

$$\sigma^{-1}_{ik}(\mathbf{H})=\sigma^{-1}_{ki}(-\mathbf{H}),$$

$$\kappa_{ik}(\mathbf{H})=\kappa_{ki}(-\mathbf{H}), \tag{4}$$

$$\beta_{ik}(\mathbf{H})=T\alpha_{ki}(-\mathbf{H}).$$

这也就是所要求的最普遍形式的关系式。这些关系式推广了 § 25 中沒有磁場时和 § 21 中沒有温度陡度时所得到的关系。

对于弱磁場內的各向同性导体，精确到 **H** 的一次項，我們得到

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{j}}{\sigma}+\alpha\nabla T+R[\mathbf{Hj}]+N[\mathbf{H}\nabla T], \tag{5}$$

$$\mathbf{q}-\varphi\mathbf{j}=\alpha T\mathbf{j}-\kappa\nabla T+NT[\mathbf{Hj}]+L[\mathbf{H}\nabla T]. \tag{6}$$

式中的 σ 和 κ 分别为通常的电导率和热导率，α 是(25.1)式內出現的温差电系数，R 为霍耳系数，而 N, L 为新系数。$N[\mathbf{H}\nabla T]$ 这一項可以看作磁場对温差电动势的影响(即能斯脫效应)，而 $L[\mathbf{H}\nabla T]$ 一項可視为磁場对热导率的影响(勒杜克-里紀效应)。

在两种媒质的交界面上，矢量 **j** 和 **q** 的法向分量是連續的，因此矢量

$$-\kappa\nabla T+\alpha T\mathbf{j}+NT[\mathbf{Hj}]+L[\mathbf{H}\nabla T]$$

的法向分量也是連續的。$NT[\mathbf{Hj}]$ 这一項代表磁場对帕耳帖效应的影响，称为厄廷好森效应。

1 秒內导体单位体积所放出的热量为 $Q=-\operatorname{div}\mathbf{q}$。这里必須把(6)式的 **q** 代入，然后用(5)式代替 $-\nabla\varphi=\mathbf{E}$。如果导体的組分是均匀的，則量 $\alpha, N, L\cdots$ 只是温度的函数，于是它們的陡度与 ∇T 成正比。在計算中我們略去了所有 **H** 的二次項；在这种近似下，可以假設 $\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma}\right)\cong\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$. 此外注意到，对外場 **H** 而言(場源在导体外)，我們有 $\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$①。最后，和通常的恒定电流的情况一样，$\operatorname{div}\mathbf{j}=0$。注意到这些并經过計算后，我們得到

$$Q=\frac{j^2}{\sigma}+\operatorname{div}(\kappa\nabla T)-T\mathbf{j}\nabla\alpha+$$

$$+\frac{1}{\sigma T}\frac{d}{dT}(\sigma NT^2)[\mathbf{jH}]\nabla T.$$

最后一項表示由于磁場出現而引起的湯姆逊效应的变化。

§ 26. 扩散电現象

由于扩散現象的存在，引起电解质溶液內发生一种在固体导体內观察不到的特殊現象。

---

① 同时我們还略去了极微弱的效应——电流本身的磁場对热量放出的影响。

为了簡明起見，我們将假設整个溶液的溫度相同。同时，我們在这里只限于研究未被溫差电效应所复杂化的純粹扩散电現象。

代替溶液的压强 p 和濃度 c，利用压强和化学势 ζ 作为自变数更为方便。在这里我們把 ζ 定义为单位质量溶液的热力学势对其濃度 c 的导数(保持 p 和 T 不变)；这时我們将濃度理解为在給定体积元內电解质的质量与液体的总质量之比①。应該記住，化学势不变(除了压强和溫度不变外)是热力学平衡的条件之一。

§ 25所給出的电場势定义，在現在的情况下应稍作变更，因为載流子現在不是傳导电子，而是电解质內的离子。即是說，合理的定义(参閱 149 頁的底注) 应为 $\varphi=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)_c$，式中的 Φ 是化学势，而 ρ 是单位体积溶液离子的总电荷(当然，在取微分以后，由于溶液是电中性的，必須令 $\rho=0$)。求微分时保持质量濃度不变，也即是保持单位体积內两种正負号的离子的总质量不变。

当存在化学势陡度时，則在电流密度的公式內必須加入与它成正比的附加項：

$$\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}-\beta\nabla\zeta), \tag{26.1}$$

这和(25.2)式內的附加項相似。下面我們将证明，当化学势陡度(或溫度陡度)保持不变时，$\mathbf{j}$ 将与压强陡度无关，因而(26.1)式內含 ∇p 的一項就不存在②。

---

① 通常的化学势定义为 $\zeta_1=\frac{\partial\Phi}{\partial n_1}$，$\zeta_2=\frac{\partial\Phi}{\partial n_2}$，其中 Φ 是 1 克溶液的热力学势，而 n_1, n_2 是 1 克溶液內已溶解物质和溶剂的粒子数。粒子数 n_1 和 n_2 的关系为 n_1m_1+ $+n_2m_2=1$(m_1, m_2 是两种粒子的质量)，而濃度 $c=n_1m_1$。因此，此处引入的化学势为

$$\zeta=\frac{\partial\Phi}{\partial c}=\frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial c}+\frac{\partial\Phi}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial c}=\frac{\zeta_1}{m_1}-\frac{\zeta_2}{m_2}.$$

② 但是应着重指出，当濃度陡度不变时，$\mathbf{j}$ 与压强陡度有关：

$$\nabla\zeta=\left(\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)_{p,T}\nabla c+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial p}\right)_{c,T}\nabla p.$$

除了电流外，我們还必須研究同时发生的电解质量的轉移。这时必須注意，当电流通过溶液时伴随发生宏观的流体运动。由这种宏观的流体运动所轉移的电解质的质量流密度等于 $\rho c\mathbf{v}$（$\mathbf{v}$ 是速度，ρ 是溶液密度）。此外，电解质的轉移还通过分子的扩散形式进行。我們用 $\mathbf{i}$ 表示这种扩散流的密度，于是，总流量密度为 $\rho c\mathbf{v}+\mathbf{i}$。不可逆的扩散过程也导致熵的增加；总熵的变化速度由下式得出[①]

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt}=\int\frac{\mathbf{E}\mathbf{j}}{T}dV-\int\frac{\mathbf{i}\nabla\zeta}{T}dV. \tag{26.2}$$

和电流密度一样，扩散流也可以写成 $\mathbf{E}$ 和 $\nabla\zeta$ 的綫性組合形式，或者是写成 $\mathbf{j}$ 和 $\nabla\zeta$ 的綫性組合形式。利用动力系数的对称性，这表达式內的系数之一可以和(26.1)式的系数 β 联系起来，和前一节对 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{q}-\varphi\mathbf{j}$ 所做的完全相似。結果得到

$$\mathbf{i}=-\frac{\rho D}{\left(\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)_{p,T}}\nabla\zeta+\beta\mathbf{j}. \tag{26.3}$$

$\nabla\zeta$ 前面的系数在这里可用通常的扩散系数来表示[②]。

(26.1)和(26.3)式內不可能存在与压强陡度成正比的項，叉和前一节一样，可从熵增加定律得出，因为这样的項会使总熵的导数(26.2)不为实在正值。

(26.1)和(26.3)式包含了全部的扩散电現象，我們在这里不准备詳細討論它們。

例 題

假設两平行平面板（由同一金屬 A 作成）浸在电解质溶液 AX 內。試求电流密度和两平行平面板間所加的电势差之間的关系式。

① 这个式子內第二項的推导参閱“連續介质力学”第二版 § 57。

② 如果 $\mathbf{j}=0$ 和压强（以及温度）保持不变，我們得到 $\mathbf{i}=-\rho D\nabla c$。

解. 当电流流过时，金属从一个电极上溶解，在另一个电极上淀积。这时溶剂（水）是静止的，而流过溶液的金属的质量流密度为 $\rho v=\frac{jm}{e}$（j 为电流密度，m 和 e 分别为离子 A^+ 的质量和电荷）①。另一方面，这质量流由表达式 $\mathbf{i}+\rho vc$ 得出，其中 $\mathbf{i}$ 为(26.3)式。假設流体內的压强相同②，于是得到方程：

$$\rho D\frac{dc}{dx}=\left[\beta-\frac{m}{e}(1-c)\right]j \tag{1}$$

（x 是連接两个电极方向的坐标）。因为在溶液內，$j=$ 常数，由此得到

$$jl=\int_{c_1}^{c_2}\frac{\rho Ddc}{\beta-\frac{m}{e}(1-c)}, \tag{2}$$

式中 c_1, c_2 是两平行平面板面上的濃度，而 l 是两板間的距离。

两板間的电势差 $\mathscr{E}$ 可从总能量耗散 Q（1 秒內）簡单地求出，这耗散必須等于 $j\mathscr{E}$（屬于单位面积的板面）。按照(26.1)和(26.2)式，我們有

$$Q=T\frac{d\mathscr{S}}{dt}=\int\left\{\frac{j^2}{\sigma}+\rho D\frac{\partial\zeta}{\partial c}\left(\frac{dc}{dx}\right)^2\right\}dx=j\mathscr{E}$$

利用(1)式，得到

$$\mathscr{E}=\int_{c_1}^{c_2}\frac{\rho Ddc}{\sigma\left[\beta-\frac{m}{e}(1-c)\right]}+\int_{c_1}^{c_2}\frac{\partial\zeta}{\partial c}\left[\beta-\frac{m}{e}(1-c)\right]dc. \tag{3}$$

由公式(2)和(3)，就可解出（在非显式形式下）所提出的問題。

如果电流 j 很小，濃度差 c_2-c_1 也很小。用被积式与 c_2-c_1 的乘积代替积分，就得到溶液的有效电阻率为

$$\frac{\mathscr{E}}{lj}=\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\rho D}\frac{\partial\zeta}{\partial c}\left[\beta-\frac{m}{e}(1-c)\right]^2.$$

(3)式的第一項給出由于电流流过时所引起的电势降$\left(\int j\frac{dx}{\sigma}\right)$。第二項是由溶液內的濃度差所引起的电动势（在某种意义上，与温差电动势相似）。后一表达式甚至和具体的一維問題的条件无关，它是“濃差电池”电动势的普遍表达式。

---

① 应記住的是，溶液內的流体力学速度 $\mathbf{v}$ 这样定义，即 $\rho\mathbf{v}$ 为流体单位体积內的动量（参閱“連續介質力学”第 2 版 § 27）。因此，在現在的情况下，只有被溶解的金屬运动这一事实，对 $\rho\mathbf{v}$ 的計算幷无影响。

② 估計到流体运动所引起的压强改变，将导致高級小量。

第四章 恒定磁場

§27. 恒定磁場

描写物质内的恒定磁場是利用两个麦克斯韦方程，由把下列两个微观方程:

$$\operatorname{div} \mathbf{h}=0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h}=\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v} \tag{27.1}$$

求平均值，就可以得到这两个方程。平均磁場强度一般称为磁感应强度，并表示为

$$\overline{\mathbf{h}}=\mathbf{B}. \tag{27.2}$$

因此，把(27.1)中第一式求平均值的結果为

$$\operatorname{div} \mathbf{B}=0. \tag{27.3}$$

在第二方程內，求平均值时对时間的导数变为零，因为假設平均磁場不变，于是有

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}. \tag{27.4}$$

微观电流密度的平均值，一般說来，无論在导体內或电介质內，都不为零。这两类物质的唯一差別是，在电介质內总是

$$\int \overline{\rho\mathbf{v}}\, d\mathbf{f}=0, \tag{27.5}$$

式中积分对物体任意横截面的总面积进行；但在导体內，这积分可以不为零。首先我們假設物体內(如果它是导体)沒有总电流，也即是假設关系式(27.5)成立。

(27.5)式对物体的任何截面积分都等于零，表明矢量 $\rho\mathbf{v}$ 可以写成另一矢量(一般表示为 $c\mathbf{M}$)的旋度形式:

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \tag{27.6}$$

而且量M只在导体內不为零(与§6中类似的討論比較)。实际上，設有一回路包圍导体并处处在导体外通过，对这回路所圍成的表面进行积分，我們得到

$$\int \overline{\rho \mathbf{v}} d\mathbf{f} = c \int \operatorname{rot} \mathbf{M}\, d\mathbf{f} = c \oint \mathbf{M} d\mathbf{l} = 0.$$

矢量M称为物体的磁化强度。把它代入(27.4)式，得到

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \tag{27.7}$$

式中矢量H和磁感应强度B的关系为

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}, \tag{27.8}$$

这式子类似于电感应强度D和电場强度E的关系式。虽然根据与E的类似，通常称矢量H为“磁場强度”，但是应該記住，实际上，磁場强度的眞正平均値为B，而不是H。

为了闡明量M的物理意义，我們来研究在导体內运动的全部带电粒子所产生的总磁矩。按照磁矩的定义[1]，这即是积分：

$$\frac{1}{2c}\int [\mathbf{r} \cdot \overline{\rho \mathbf{v}}]\, dV = \frac{1}{2}\int [\mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{M}]\, dV.$$

因为在导体外 $\overline{\rho \mathbf{v}} \equiv 0$，因此，可以对包圍导体的任何体积进行积分。用下列方式变换积分：

$$\int [\mathbf{r}[\nabla \mathbf{M}]]\, dV = \oint [\mathbf{r}[d\mathbf{f}\mathbf{M}]] - \int [[\mathbf{M}\nabla]\mathbf{r}]\, dV.$$

对导体外的面积分变为零。在第二項內，我們有

$$[[\mathbf{M}\nabla]\mathbf{r}] = -\mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{M} = -2\mathbf{M}.$$

这样一来，得到結果为

$$\frac{1}{2c}\int [\mathbf{r} \cdot \overline{\rho \mathbf{v}}]\, dV = \int \mathbf{M}\, dV. \tag{27.9}$$

---

① 参閱“場論”第二版，§43，1948。

我們看到，磁化强度矢量代表物体单位体积的磁矩①。

除了(27.3)和(27.7)式外，还应該加入一个联系 H 和 B 的关系式；只有这样，方程組才成为完全的，例如在不太强的磁場內的非铁磁体中，B 和 H 的关系是綫性的。在各向同性物体內，这种綫性关系归結为簡单的比例关系：

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \tag{27.10}$$

系数 μ 称为磁导率。而在关系式 $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ 內的比例系数：

$$\chi = \frac{\mu - 1}{2\pi}, \tag{27.11}$$

则称为磁化率。

与介电常数 ε 在所有物体中都大于 1 相反，磁导率则可以大于 1，也可以小于 1。因此我們只能肯定，总是 $\mu > 0$(关于 μ 与 ε 这一差別的原因，参閱 § 31；不等式 $\mu > 0$ 的证明，将在 § 30 給出)。与此相应，磁化率 χ 可为正値，也可以为負値。

另一个定量的差別是，絕大多数物体的磁化率要比它們的介电常数小得多。这种差別是由于物质(非铁磁体)的磁化是 $\frac{v}{c}$ 的二次的相对論效应(v 是原子內的电子速度②)。

从方程 $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ 和 $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$ 得出(参照 § 6)，在两种不同媒质的边界上，应滿足条件：

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}. \tag{27.12}$$

---

① 只有建立了这关系式后，量 $\mathbf{M}$ 才成为完全确定的。物体內的关系式(27.6)和物体外的 $\mathbf{M} = 0$ 本身，都还不能单値地确定这个量，因为在物体內部，可以在 $\mathbf{M}$ 上加上一个 $\operatorname{grad} f$ 形式的矢量，而不破坏等式(27.6)(比較 53 頁上对电极化所作的相似底注)。

② 比值 $\frac{v}{c}$ 和 $\mathbf{H}$ 一起，一次出現在描写物体与磁場的相互作用的哈密頓函数內，再次出現在原子或分子的元磁矩內。

这方程組以及其边界条件，在形式上和自由电荷不存在时电介质內的静电場方程組相同，所不同的只是分别用H和B代替了E和D而已。由于方程 $\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$，可以求得H的形式为 $\mathbf{H}=-\operatorname{grad}\psi$，对于电势 ψ，得到和静电势完全相同的式子。因此，第二章中所研究的一系列静电場問題的解，就可以直接移用到恒定磁場上。特别是§8中所得到的均匀电場內介电橢球的公式，对均匀磁場內的磁橢球来說，也是完全正确的(只要符号作相应的改变)。

磁感应强度的切向分量与其法向分量不同，在两种媒质的边界上发生突变。可以把这种突变的数值和表面的电流密度联系起来。为此，我們将(27.4)式的两側对小綫段 Δl 积分，而 Δl 与分界面相交于法綫方向。然后令长度 Δl 趋近于零；但是，这时积分 $\int\overline{\rho\mathbf{v}}dl$ 趋近于有限值。这样得出的量

$$\mathbf{g}=\int\overline{\rho\mathbf{v}}dl \tag{27.13}$$

可以称为面电流密度；它定出单位时間內通过表面上单位长綫內的电荷。我們选擇表面上某一点处的g方向作为 y 軸，选擇法綫方向作为 x 軸，并从媒质1指向媒质2。于是由积分(27.4)式，得到

$$\int\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)dx=\frac{4\pi}{c}g_y=\frac{4\pi}{c}g.$$

由于 B_x 的連續性，导数 $\frac{\partial B_x}{\partial z}$ 为有限的，因此当綫段 Δl 趋近于零时，积分也趋近于零。由 $\frac{\partial B_z}{\partial x}$ 的积分，得出表面两側的 B_z 值之差。因此，

$$B_{2z}-B_{1z}=-\frac{4\pi}{c}g.$$

这等式可以写成矢量形式：

$$\frac{4\pi}{c}\mathbf{g}=[\mathbf{n},\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1]=4\pi[\mathbf{n},\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1], \tag{27.14}$$

式中 $\mathbf{n}$ 是法綫方向的单位矢量，其方向指向媒质 2 內部；在后一变換中，我們已把 $\mathbf{H}$ 的切向分量的連續性考慮在內。

§ 28. 晶体的磁对称性

晶体的电性质和磁性质有着重大的差别，这是由于电荷和电流对时間变号的行为有所不同。

大家知道，由于运动方程对时間变号的不变性，因此，对物体的某一热力学平衡态，形式地以 $-t$ 代替 t 所得到的状态，也必然是可能的平衡态之一。由此产生两种可能性：以 $-t$ 代換 t 后得到的状态或者和原来的状态相同，或者不相同。

在本节內，我們用 $\rho(x, y, z)$ 和 $\mathbf{j}(x, y, z)$ 表示晶体每一点处只对时間平均得到的眞正(微观)电荷密度和电流密度(不是像宏观理論一样，对物理无限小体积求平均了)。这也就是分别确定晶体的电結构和磁結构的函数。

以 $-t$ 代換 t 时改变 $\mathbf{j}$ 的正負号，如果这样代換后物体的状态不变，则表明 $\mathbf{j}=-\mathbf{j}$，也就是 $\mathbf{j}=0$。由此可見，这也就是函数 $\mathbf{j}(x, y, z)$ 严格地为零的晶体所以存在的原因。在这种晶体內，除了电荷密度为零外，物体每一点处的平均磁場和磁矩(对时間平均)也严格地等于零(当然此处所指的都是沒有外磁場时的物体状态)。对于这种晶体，我們称它为沒有“磁結构”的晶体。实际上，絕大多数的晶体都是屬于这一类。

以 $-t$ 代換 t 时，电荷密度 ρ 一般不改变。因此不存在任何原因使这函数恒等于零。換句話說，不存在沒有“电結构”的晶体。这也就是上面所提到的晶体的电性质和磁性质之間的重大差别。

現在我們来研究以 $-t$ 代換 t 后状态改变因而 $\mathbf{j}\neq 0$ 的晶体。我們将把这种晶体称为“磁結构”的晶体。

首先我們注意到，尽管 $\mathbf{j}$ 不等于零，但在物体的平衡状态下，

不可能存在任何总电流，也即是对元晶胞体积的积分$\int \mathbf{j}dV$时必须恒为零。否則，这电流产生宏观的磁場，因而晶体将具有随物体綫度增加而迅速增加的磁能(每单位体积的)。由于这种状态在能量上是不利的，因此，十分显然，它不相应于热力学平衡状态。

但是，电流$\mathbf{j}$可以产生不为零的宏观磁矩，也即是积分$\int[\mathbf{rj}]dV$可以不为零(再对元晶胞体积积分)。与此相应，$\mathbf{j}\neq 0$的晶体可以分为两类：宏观磁矩不为零的晶体和宏观磁矩为零的晶体。第一种晶体称为铁磁体，而第二种晶体称为反铁磁体。

电流$\mathbf{j}$分布的对称性，可以直观地看作晶体內各原子磁矩的排列和取向的对称性。若$\mathbf{j}=0$，則表明各磁矩随时間改变取向完全是无序的，于是，每个磁矩的平均值变为零。在铁磁体內，原子磁矩向某一方向的取向占优势，因而在每一晶胞內产生不为零的总磁矩。最后，在反铁磁体中，平均原子磁矩不为零，也即是取向是有规則的，但在每一晶胞內，它們互相抵銷了。

于是产生了有关电流$\mathbf{j}(x, y, z)$分布的对称性的可能类型(群)問題。这种对称性首先包含通常的要素——轉动、反射和平移。与此相应，在$\mathbf{j}$的各种可能对称群中，总共有230种普通的結晶学的空間对称群。但是，这远远地沒有包括全部待研究的对称群。如上面已指出的，以$-t$代换t时矢量$\mathbf{j}$改变正負号；由此产生新的可能的对称要素——对电流反向变换的对称性；一般用R表示这种变换。如果电流分布本身具有R的对称要素，則表明$\mathbf{j}=-\mathbf{j}$，也即是$\mathbf{j}=0$，因而晶体一般不具有磁結构。但是不为零的函数$\mathbf{j}(x,y,z)$，可以对R变换与其他对称要素——轉动、反射和平移——的各种組合是对称的。由此可見，确定电流分布的对称性的可能类型(“磁空間群”)的問題，在于构成各种可能的对称群，这些群不仅包含普通空間群內的变換，而且也包含由普通变换与R变换組合而成的变换。

如果电流分布的对称性已知，則我們也能求出給定晶体內粒子排列的晶軸对称性，这种晶軸对称性和函数 $\rho(x, y, z)$ 的对称性相同。如果形式地假定 R 变换是恒同的(应用到函数 ρ 上，即是这样)，則从 $\mathbf{j}$ 的对称群得到的空間对称群，将完全决定粒子排列的晶軸对称性。

但是，如果我們感兴趣的只是晶体的宏观性质，那末就无須知道函数 $\mathbf{j}(x, y, z)$ 的全部对称群。晶体的宏观性质只与晶体內的取向有关，而晶体点陣的平移对称則与它无关。大家知道，从純粹的晶体結构观点看来，有 32 种晶类具有"方向对称性"。这是由純粹的轉动和反射构成的对称群；如果在空間群內假定全部平移是恒同变換，而把螺旋軸和滑移面看作簡单的对称軸和对称面，則从这些空間群即可得到上述的对称群。从磁性质观点看来，宏观对称性应按轉动、反射和它們与 R 要素的組合而构成的群来分类。这些群可以称为磁性晶类。它們和磁空間群的关系，与普通晶类和普通空間群的关系一样。

磁性晶类首先包括 32 种附有 R 要素的普通晶类和 32 种沒有 R 要素的晶类。前一种晶类特别是沒有磁結构的全部晶体的宏观对称群。但是有磁結构的晶体也可能有这种对称类。为此，R 要素不能单独包含在这种晶体的磁空間对称群內，而必須与平移要素組合起来。

此外有 58 种晶类，其中 R 要素只与轉动或反射組合。如果用一恒同变換代替 R，則其中每一晶类都轉变成普通晶类[①]。

---

① 这些晶类与 A. B. 舒布尼科夫首先发現的有两种顏色的面的几何图形(多面体)对称群是同晶的(舒布尼科夫称为"混合极化群")。R 要素相应于改变各面顏色的变換[参閱 A. B. Шубников, Симметрия и антисимметрия конечных Фигур (有限图形的对称与反对称)，苏联科学院出版社，19э1]。这些晶类作为晶体磁性对称群的直接推导，已由 Б. A. 塔夫格尔和 B. M. 扎依采夫給出(ЖЭТФ 30, 564, 1956)。

磁空間群总共有 1651 种。其推导方法(作为舒氏群)参閱 H. B. 貝格夫、H. H. 涅罗諾夫、T. C. 斯米尔諾夫的論文[晶体研究所丛刊，11, 33(1955)]和 A. M. 扎莫尔扎耶夫的論文[Кристаллография, 2, 15(1857)]。

应該指出，磁結构的产生(铁磁体或反铁磁体)常常包含比較弱的相互作用①。因此，磁性物体的晶体結构，与非磁化相的晶体結构相比較，只是代表一种小的畸变，而溫度降低时非磁化相常常变成磁化相。在这方面，铁磁体特别不同于普通热电体，而和铁电体相类似。

知道了一晶体的磁晶类，就可以确定晶体宏观磁性质的特征，其中最重要的是存在或不存在宏观磁矩，即存在或不存在自发磁化(波有外場时)。磁矩M为一矢量，它在轉动和反射变换时的行为和軸矢量(两极矢量的矢积)一样，而在R变换时改变正負号。如果晶体內有一个方向，在这方向上的具有上述性质的矢量M，在給定磁晶类的各种变换下保持不变，則这种晶体就具有自发磁化强度。

必須再着重指出它与宏观电性质的差別。后者的特征完全由普通晶类决定。特別是要使晶体成为热电晶体，只須这种晶类容許存在极化矢量P(电矩)。如果根据軸矢量M对給定晶体的純粹結构(非磁化)晶类的各种变换所有的行为，来推断存在或不存在宏观磁矩，則完全是不正确的。

为了举例說明，我們来研究由相同原子組成的正方晶体点陣，原子的磁矩方向平行于正方軸②。它的磁性晶类包含一个四次軸$C_4^{(z)}$，二个与R变换組合而成的二次軸($C_2^{(x)}R$和$C_2^{(y)}R$)，一个与z軸垂直的对称平面$\sigma_h^{(z)}$和二个与R变换組合而成的对称平面($\sigma_v^{(x)}R$, $\sigma_v^{(y)}R$)。这种群容許存在矢量M，其方向平行于正方軸。如果用1代替R，我們就得到对称晶类，也即是晶类D_{4h}。这种晶体

① 原子磁矩間的交換相互作用通常使价鍵趋于飽和，形成非磁性結构。只有門捷列夫周期表过渡族內的元素，其原子內位置較深的d层和f层的电子的比較弱的交換相互作用，才形成磁結构。

② 例如，铁的铁磁相晶体点陣就是如此。从晶体关系方面看来，它代表有微小畸变的立方晶体点陣(沿一个四次軸发生畸变)。

本身不容許存在軸矢量M(因为分别在平面 $\sigma^{(z)}$, $\sigma^{(x)}$, $\sigma^{(y)}$ 内反射时，其分量 M_x, M_y, M_z, 改变正負号)。

自发宏观磁矩不为零的晶体性质(铁磁体)，将在第五章內詳細討論。在其余晶体內，B 和 H 的关系是綫性的(在不太强的場內)：

$$B_i = \mu_{ik} H_k, \tag{28.1}$$

这关系式不包含自由項。磁导率張量 μ_{ik} 是对称的，这从下面§ 30 內导出的热力学关系式，可以推知这种情况，其方式和§ 13 內证明張量 ε_{ik} 的对称性完全一样。

我們还应提到两种在原理上可能存在的現象。其中一种是"压磁現象"，即在晶体的磁場和形变之間存在綫性关系(类似于压电体——參閱§ 17)。另一种現象是物质內的磁場与电場之間存在綫性关系。例如，由这种关系可以引起物质內产生与电場成正比的磁化作用[①]。这两种現象可能存在于某些磁对称晶体內。但是我們在这里不准备对它們作深入的研究，因为到目前为止，看来还未在任何物质中观察到这两种現象。

§ 29. 恒定电流的磁場

如果导体內有不为零的总电流流过，则导体內的平均电流密度可以写成相加的形式：

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \mathbf{j}.$$

第一項来自媒质的磁化，它对总电流沒有貢献，因此通过导体横截面上的总电荷轉移，只决定于第二項的积分 $\int \mathbf{j} d\mathbf{f}$。量 j 称为傳导电流密度[②]。§ 20 內的討論即是指这种电流而言；特别是单位时間

① 这种类型的二次效应，在原理上甚至在各向同性晶体內也应存在，但由于数值很小，因此沒有什么意义。

② 量 $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ 有时称为分子电流密度。但是这一名詞不完全符合于导体內电荷运动的实际物理图像。例如在金屬內，对磁化强度 $\mathscr{M}$ 有貢献的不但有原子內运动的电子，而且也有傳导电子。

在单位体积内所耗散的能量等于 $\mathbf{E}\mathbf{j}$。

电流 $\mathbf{j}$ 在导体体积内的分布，由§ 20 內的方程得出，这些方程內沒有包含电流 $\mathbf{j}$ 所产生的磁場（假設略去場对金屬电导率的影响）。因此，确定电流的磁場問題，必須根据該电流的分布情况来解決。这种場方程和§ 27 內所得到的場方程不同的地方，是(27.7)的右边有一項$\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$，而不是零：

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0, \tag{29.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{29.2}$$

傳导电流密度 $\mathbf{j}$ 与电場强度成正比，是一个不会成为无穷大的有限量，特别是在两种媒质的交界面上。因此，(29.2)式右边出現的項，并不影响$\mathbf{H}$的切向分量为連續的边界条件。

为了求解(29.1)和(29.2)式，最方便的是引入所謂矢势 $\mathbf{A}$，即令

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{29.3}$$

結果(29.1)式恒被滿足。由等式(29.3)，还不足以唯一地决定矢势。我們可以再添上一个 $\operatorname{grad}f$ 形式的矢量，这并不会破坏(29.3)式。由于这种非单值性，可以在 $\mathbf{A}$ 上加一个附加条件，即选擇

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=0. \tag{29.4}$$

把(29.3)代入(29.2)內，就得到 $\mathbf{A}$ 的方程。在 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 的綫性关系下，我們有

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{29.5}$$

写成这种形式以后，这一方程对任何不均匀媒质都是适用的。

在均匀媒质內，$\mu=$常数，因为 $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}=-\Delta\mathbf{A}$，因此(29.5)式变为

$$\Delta\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\mu\mathbf{j}. \tag{29.6}$$

如果我們有磁导率 μ 不同的互相接触的两种以上媒质，則在每一种均匀媒质內，普遍方程(29.5)都变成(29.6)的形式，而在它們的边界面上，必須滿足矢量$\left(\frac{1}{\mu}\right)\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$的切向分量为連續的条件。此外，矢量 $\mathbf{A}$ 本身的切向分量也必須为連續的，因为它們的突变表明磁感应强度 $\mathbf{B}$ 在边界上变成无穷大。

如果在一个方向上(我們取它为 z 軸方向)，媒质为均匀而无限的，則求这种媒质內的平面磁場問題，可使場方程大为簡化，而且产生磁場的电流也处处指向 z 軸方向，这时电流密度 $j_z=j$ 只是 x, y 的函数。自然可以假設(已由实驗证实)这种場的矢势也指向 z 軸：$A_z=A(x, y)$〔条件(29.4)这时自动滿足〕，而磁場相应地处处与 xy 平面平行。我們用 $\mathbf{k}$ 表示 z 軸上的单位矢量，于是有

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=\mathrm{rot}\,A\mathbf{k}=[\mathrm{grad}\,A\mathbf{k}],$$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\right)=\left[\nabla\left[\frac{\nabla A}{\mu}\cdot\mathbf{k}\right]\right]=-\mathbf{k}\,\mathrm{div}\,\frac{\nabla\mathbf{A}}{\mu}.$$

因此，方程(29.5)变成

$$\mathrm{div}\frac{\mathrm{grad}\,A}{\mu}=-\frac{4\pi}{c}j(x, y), \tag{29.7}$$

也即是，我們实际上对一个标量 $A(x, y)$ 得到一个方程。如果是“块状均匀”的媒质，則(29.7)式变成

$$\Delta\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\mu j(x, y), \tag{29.8}$$

边界条件是 A 和 $\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}$ 在分界面上为連續的[①]。

① 我們注意到，求平面的恒定磁場問題，相当于求电介质內密度为 $\rho_{旁}(x, y)$ 的旁电荷所产生的电場的平面靜电学問題。后一問題要求解方程

$$\mathrm{div}(\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi)=-4\pi\rho_{旁}$$

(φ 为場势)，它与(29.7)式不同只是分别用 $\varphi, \rho_{旁}, \frac{1}{\varepsilon}$ 代替了 $A, \frac{z}{c}, \mu$。A 和 φ 的边界条件也是相同的。但是，按照 ρ 或 A 分别求 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{B}$ 时，就会发生差别。在每一点处，矢量 $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi$ 和 $\mathbf{B}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ 的絕对值相同，但方向互相垂直。

如果电流分布对 z 軸是对称的: $j_z=j(r)$ (r 是至 z 軸的距离), 則磁場可以非常簡单地求出。显然, 在这种情况下, 磁力綫为 $r=$常数的一族圓。磁場的絕对值直接由下式得出:

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l}=\frac{4\pi}{c}\int \mathbf{j}\, d\mathbf{f}, \tag{29.9}$$

这个式子就是(29.2)式的积分形式。因此

$$H(r)=\frac{2J(r)}{cr}, \tag{29.10}$$

式中 $J(r)$ 是流过 $r=$常数的圓內的总电流。

如果圓电流的分布是軸对称的, 也即是如果在柱面坐标 r, φ, z 內电流分布的形式为

$$j_r=j_z=0,\ j_\varphi=j(r, z),$$

則也可以把矢量方程(29.5)化成标量方程。我們現在来求出矢势为 $A_r=A_z=0, A_\varphi=A(r, z)$。这时, 磁感应 $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$ 的分量为

$$B_r=-\frac{\partial A}{\partial z},\ \ B_z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA), B_\varphi=0,$$

而(29.2)式的 φ 分量給出

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}rA\right)=-\frac{4\pi}{c}j(r, z). \tag{29.11}$$

設在一种重要的情况下, 可以忽略媒质的磁性质, 也即是可以处处令 $\mu=1$, 則电流的磁場方程就可在普遍形式下解出。这时得到全部空間內的矢势方程为

$$\Delta\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

对不同媒质的分界面(包括有电流流过的导体面), 沒有加上任何附加的条件。大家知道, 这个方程的解为[①]

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}}{R}dV, \tag{29.12}$$

① 参閱"場論"第二版, § 42。

它在无穷远处变为零，式中 R 是从我們求出 $\mathbf{A}$ 的点(观測点)至体积元 dV 的距离。把 rot 作用到这个式子上，应該記住，被积式 $\frac{\mathbf{j}}{R}$ 必須对观測点的坐标求微分($\mathbf{j}$ 与观測点坐标无关)，于是

$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{j}}{R}=\left[\operatorname{grad}\frac{1}{R}\cdot\mathbf{j}\right]=-\frac{1}{R^3}\left[\mathbf{R}\mathbf{j}\right],$$

式中半徑矢量 $\mathbf{R}$ 的方向从 dV 指向观察点。由此可見

$$\mathbf{B}=\mathbf{H}=\frac{1}{c}\int\frac{[\mathbf{j}\mathbf{R}]}{R^3}dV, \qquad (29.13)$$

如果电流流过的导体是非常細的(細导綫)，而我們感兴趣的只是导体周圍的磁場，則导体的厚度可以忽略不計。以后我們将經常把它看作綫电流。在这种情况下，对导体体积的积分，就可以代以对其迴路的积分。即是綫电流的公式，可从体电流的公式得到，只要在体电流的公式內作下列代換：

$$\mathbf{j}\,dV\longrightarrow J\,d\mathbf{l},$$

式中 J 是流过导体的总电流。例如，从(29.12)和(29.13)式，我們得到

$$\mathbf{A}=\frac{J}{c}\int\frac{d\mathbf{l}}{R},\quad \mathbf{H}=\frac{J}{c}\int\frac{[d\mathbf{l}\mathbf{R}]}{R^3}. \qquad (29.14)$$

第二个式子就是所謂的毕奥-薩瓦尔定律。

綫电流磁場的这种簡单公式，并不是由于 $\mu=1$ 的假定。因为我們已忽略了导体的粗度，因此对它的表面不必加上任何边界条件，而导体材料的磁性质一般是不重要的(甚至可以是铁磁性的)。这样一来，对于导体周圍媒质內的場，(29.6)式的解为

$$\mathbf{A}=\frac{\mu J}{c}\int\frac{d\mathbf{l}}{R},\quad \mathbf{B}=\frac{\mu J}{c}\int\frac{[d\mathbf{l}\,\mathbf{R}]}{R^3}, \qquad (29.15)$$

这个解当媒质的磁化率为任何值时都适用。于是，媒质的存在只是使磁感应强度改变 μ 倍，而磁場强度 $\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu}$，一般不发生变化。

求綫电流的磁場問題，也可以作为势論問題来解决。因为我們忽略了导体的体积，因此实际上所求的是沒有电流的空間內的場（除开奇异綫——綫电流——外）。但是，当电流不存在时，恒定磁場具有滿足均匀媒质內拉普拉斯方程的标势。但是，磁場势和靜电势之間存在重大的差別。电場势总是单值函数，这是因为在整个空間內（包括有电荷的区域），$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$，因而繞任何封閉迴路一周（即 $\mathbf{E}$ 沿这迴路循环一次）的电势变化等于零。但磁場繞包圍綫电流的迴路循环一周并不为零，而等于 $\frac{4\pi J}{c}$。所以繞电流綫一周后，磁場势值即改变这一数值，也即是說，磁場势是多值函数。

如果电流系統集中在空間的一有限区域內（而在媒质和导体內，$\mu=1$），則在离它很远处，磁場的矢势为

$$\mathbf{A}=\frac{[\mathscr{M}\mathbf{R}]}{R^3}, \tag{29.16}$$

式中

$$\mathscr{M}=\frac{1}{2c}\int[\mathbf{rj}]dV \tag{29.17}$$

为該系統的总磁矩①。

对綫电流而言，这表达式变为

$$\mathscr{M}=\frac{J}{2c}\oint[\mathbf{r}\,d\mathbf{l}]$$

而且可以把它变换为对电流迴路所包圍的面积的积分。乘积 $d\mathbf{f}=\frac{1}{2}[\mathbf{r}d\mathbf{l}]$ 的絕对值，等于由矢量 $\mathbf{r}$ 和 $d\mathbf{l}$ 所圍成的三角形的面积元的面积。但矢量积分 $\int d\mathbf{f}$ 与沿那一表面（迴路所包圍的）进行积分无关。于是，閉合綫电流的磁矩等于

① 参閱"場論"第二版 § 43。在那里的推导中，显式地利用了电流是带电质点的运动这一概念。当然这种推导是非常普遍的，但是利用純粹的宏观方法，也可以得到(29.16)式（参閱本节第 4 題）。

$$\mathscr{M}=\frac{J}{c}\int d\mathbf{f}. \qquad (29.18)$$

特别是，对于平面閉合綫电流，磁矩簡单地等于$\frac{JS}{c}$，其中S是电流所包圍的平面部分的面积。

末了，我們研究一下导体內的能流問題。导体內所耗散的能量（以焦耳热的形式耗散）由电磁場的能量来补充。在稳定状态下，表示能量守恒定律的“連續性方程”为

$$-\operatorname{div}\mathbf{S}=\mathbf{jE}, \qquad (29.19)$$

式中$\mathbf{S}$为能流密度。在导体內，能流密度的表达式为

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}], \qquad (29.20)$$

这个式子在形式上和眞空內場的坡印廷矢量的表达式相同。这由直接驗算容易证明，即利用$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$和(29.2)式計算$\operatorname{div}\mathbf{S}$，就可得到(29.19)式。

如果考虑到$\mathbf{E}_t$和$\mathbf{H}_t$的連續性和(29.20)式在导体外的眞空內也是正确的，則从导体表面上$\mathbf{S}$的法向分量为連續的这一明显条件，也可单值地得到(29.20)式，而与上面的推导无关。

例 題[①]

1. 試求閉合綫电流的磁場的标势。

解. 把綫积分变换为对迴路所圍成的面积的积分，得到

$$\mathbf{A}=\frac{J}{c}\oint\frac{d\mathbf{l}}{R}=\frac{J}{c}\int\left[d\mathbf{f}\nabla\frac{1}{R}\right],$$

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}=-\frac{J}{c}\int(d\mathbf{f}\nabla)\nabla\frac{1}{R}$$

（变换时必須考慮到$\Delta\frac{1}{R}=0$），与$\mathbf{B}=-\operatorname{grad}\varphi$比較，我們求得标势为

① 在1—4題內，假定$\mu=1$。

$$\varphi=\frac{J}{c}\int d\,\mathbf{f}\nabla\frac{1}{R}=-\frac{J}{c}\int\frac{d\mathbf{f}\,\mathbf{R}}{R^3}.$$

式中的积分，从几何意义上說，代表迴路在場观察点处所張的立体角 Ω。上面提到的标势的多値性表現为，当观察点描一包含导綫的閉合綫路时，立体角 Ω 达到 2π 后改变正負号，变成 -2π。

2. 試求圓形綫电流（半徑 a）的磁場。

解. 选擇柱面坐标系 r,φ,z 的原点在圓心上，φ 角从穿过 z 軸和場观察点的平面算起。于是矢势只有分量 $A_\varphi=A(r,z)$，而按照(29.14)式，我們有

$$A_\varphi=\frac{J}{c}\oint\frac{\cos\varphi\,dl}{R}=\frac{2J}{c}\int_0^\pi\frac{a\cos\varphi\;d\varphi}{(a^2+r^2+z^2-2ar\cos\varphi)^{1/2}}.$$

由 $\varphi=\pi+2\theta$，引进新变数 θ，于是可以把上式代为

$$A_\varphi=\frac{4J}{ck}\sqrt{\frac{a}{r}}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)K-E\right],$$

式中

$$k^2=\frac{4ar}{(a+r)^2+z^2},$$

而 K 和 E 是第一种和第二种完全椭圓积分：

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\quad E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

于是我們求得感应分量为

$$B_\varphi=0,\;B_r=-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}=\frac{J}{c}\,\frac{2z}{r\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left[-K+\frac{a^2+r^2+z^2}{(a-r)^2+z^2}E\right],$$

$$B_z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)=\frac{J}{c}\,\frac{2}{\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left[K+\frac{a^2-r^2-z^2}{(a-r)^2+z^2}E\right].$$

式中我們曾利用了很容易驗证的公式：

$$\frac{\partial K}{\partial k}=\frac{E}{k(1-k^2)}-\frac{K}{k},\quad\frac{\partial E}{\partial k}=\frac{E-K}{k}.$$

在軸上$(r=0)$

$$B_r=0,\quad B_z=\frac{2\pi a^2J}{c(a^2+z^2)^{3/2}},$$

这用初等的直接計算，也可以得到。

3. 試求无限长柱形导体內柱形小孔內的磁場，导体內流过的电流均匀分

布于导体截面上（图 17）。

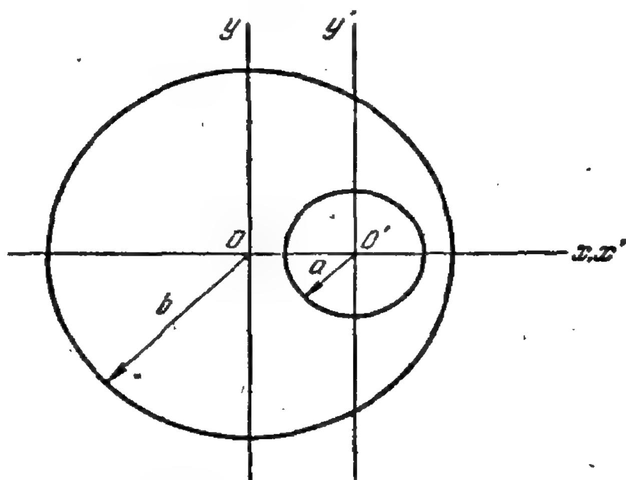


图 17

解. 如果柱体內沒有小孔，則柱体內的場等于

$H'_x=-2\pi jy/c$, $H'_y=2\pi jx/c$

（坐标綫度和坐标軸的符号如图 17 所示）。

如果內柱体上流过的电流密度为 $-j$，則它在同一观察点处所产生的場为

$H''_x=2\pi jy'/c$, $H''_y=-2\pi jx'/c$.

把这两个場疊加起来，就得到小孔內的場。注意到 $x-x'=OO'=h, y=y'$，我們得到

$$H_x=0, H_y=2\pi jh/c=\frac{2hJ}{(b^2-a^2)c},$$

也即是在 y 軸方向場是均匀的。

4. 試从(29.12)式推导距离电流很远处的場的矢势公式(29.16)。

解. 設 $\mathbf{R}=\mathbf{R}_0-\mathbf{r}$，其中 $\mathbf{R}_0$ 和 $\mathbf{r}$ 是从电流区域內某处的坐标原点分别至观察点和体积元 dV 的矢徑。把被积式展开成 $\mathbf{r}$ 的冪級数，并注意到 $\int \mathbf{j}\, dV\equiv$ $\equiv 0$，我們得到

$$A_i\cong\frac{R_k}{cR^3}\int x_k j_i\, dV$$

（略去了 R 上的下角标 0）。由分部积分下列恒等式：

$$\int x_i x_k \operatorname{div}\mathbf{j}\, dV=0,$$

我們得到

$$\int(j_i x_k+j_k x_i)dV=0.$$

因此，可以把 A_i 改写成

$$A_i=\frac{R_k}{2cR^3}\int(x_k j_i-x_i j_k)dV,$$

这和(29.16)相同。

5. 試求綫电流在磁各向异性媒质內所产生的磁場。

解. 在导体周圍的各向异性媒质內，我們有

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=\mu_{ik}\frac{\partial H_k}{\partial x_i}=0, \tag{1}$$

式中 μ_{ik} 为媒质的磁导率張量，代替引进矢势 $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$，我們在这里引入另一个矢量 $\mathbf{C}$，它由下面的等式来定义：

$$H_i=e_{ikl}\mu_{km}\frac{\partial C_l}{\partial x_m} \tag{2}$$

(e_{ikl}是反对称单位張量)。(2)式也恒滿足(1)式。对这样求得的矢量 $\mathbf{C}$，我們还可以加上附加条件：

$$\operatorname{div}\mathbf{C}\equiv\frac{\partial C_l}{\partial x_l}=0. \tag{3}$$

把(2)式代入方程 $\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$，我們得到

$$e_{ikl}\frac{\partial H_l}{\partial x_k}=-\mu_{kp}\frac{\partial^2 C_i}{\partial x_k\partial x_p}=\frac{4\pi j_i}{c}$$

[变换时利用了等式：

$$e_{ikl}e_{lmn}=\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km}$$

和条件(3)]。这样求得的 $\mathbf{C}$ 方程，在形式上和各向异性媒质內电荷所产生的电場势的方程相同(§13, 例題2)。其解为

$$\mathbf{C}=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}dV}{\sqrt{|\mu|\mu_{ik}^{-1}R_iR_k}}$$

($|\mu|$为張量 μ_{ik} 的行列式，$\mathbf{R}$为观察点和 dV 間的矢徑)。化为綫电流，我們最后得到

$$\mathbf{C}=\frac{J}{c\sqrt{|\mu|}}\oint\frac{d\mathbf{l}}{\sqrt{\mu_{ik}^{-1}R_iR_k}}.$$

§30. 磁場內的热力学关系式

磁場內磁体的热力学关系式，如我們在下面見到的，它的最后形式和电場內电介质的相应热力学关系式非常相似。但是，它們的推导却和§10內进行的有重大差别。这种差别是由于磁場和电場不同，磁場对在其內部运动的电荷不作功(因为作用在电荷上的力与速度垂直)。因此，要計算磁場加上后媒质的能量变化，必

須研究由磁場变化所感生的电場和求出电場对电流(磁場源)所作的功。

由此可見，必須引入确定电場和交变磁場的关系的方程。这个方程

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\tag{30.1}$$

是把微观方程(1.3)求平均值的直接結果。

在时間 δt 內，电場 $\mathbf{E}$ 对电流 $\mathbf{j}$ 所作的功等于

$$\delta t\int\mathbf{jE}\,dV.$$

这个量取相反的正負号就是外电动势对場所作的功 δR，外电动势是維持电流的电源。代入 $\mathbf{j}=\frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}$，得到

$$\delta R=-\delta t\frac{c}{4\pi}\int\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}dV=$$

$$=\delta t\frac{c}{4\pi}\int\operatorname{div}[\mathbf{EH}]dV-\delta t\frac{c}{4\pi}\int\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}\,dV.$$

第一个积分变换成对无穷远表面的积分后变成零。在第二个积分內，代入(30.1)式的 rot $\mathbf{E}$，并引进磁感应变化 $\delta\mathbf{B}=\delta t\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ 后，最后得到

$$\delta R=\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{H}\,\delta\mathbf{B}\,dV.\tag{30.2}$$

这式子的形式和电場发生无穷小变化时所作的功的表达式(10.2)十分类似，但是应該注意，这两个公式間的物理类似都不是这样深刻的，因为 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}$ 不同，它不是眞实的微观磁場强度的平均值。

得到了(30.2)式以后，就可以写出磁場內磁体的全部热力学关系式，其方式和 § 10 內写出电場內电介质的热力学关系式完全

相似。这只要在前面得到的公式中，分别用 **H** 和 **B** 代替 **E** 和 **D** 就行了。为了以后引用方便，我們在这里写下其中一些关系式。对于总自由能和內能求微分，我們有

$$\delta\mathscr{F}=-\mathscr{S}\delta T+\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{H}\,\delta\mathbf{B}\,dV,$$

$$\delta\mathscr{U}=T\delta\mathscr{S}+\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{H}\delta\mathbf{B}dV,\qquad(30.3)$$

这些量屬于单位体积的为

$$dF=-SdT+\zeta d\rho+\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\,d\mathbf{B},$$

$$dU=TdS+\zeta d\rho+\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\,d\mathbf{B}.\qquad(30.4)$$

除了 F,U 之外，我們也需要热力学势：

$$\tilde{U}=U-\frac{\mathbf{HB}}{4\pi},\quad\tilde{F}=F-\frac{\mathbf{HB}}{4\pi},\qquad(30.5)$$

这些热力学势的微分为

$$d\tilde{F}=-SdT+\zeta d\rho-\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\,d\mathbf{H},$$

$$d\tilde{U}=TdS+\zeta d\rho-\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\,d\mathbf{H}.\qquad(30.6)$$

在 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 的綫性关系下，我們可以写出全部量的最后形式为

$$U=U_0(S,\rho)+\frac{B^2}{8\pi\mu},\ F=F_0(T,\rho)+\frac{B^2}{8\pi\mu},$$

$$\tilde{U}=U_0(S,\rho)-\frac{\mu H^2}{8\pi},\ \tilde{F}=F_0(T,\rho)-\frac{\mu H^2}{8\pi}.\qquad(30.7)$$

我們可以把功 δR(或者溫度不变时的 δF) 通过电流密度和磁場矢势表示成另一种形式。为此，假定 $\delta\mathbf{B}=\mathrm{rot}\,\delta\mathbf{A}$，幷写出

$$(\delta\mathscr{F})_T=\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\delta\mathbf{A}\,dV=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int\mathrm{div}[\mathbf{H}\,\delta\mathbf{A}]dV+\frac{1}{4\pi}\int\delta\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\,dV.$$

第一个积分重新变为零，而从第二个积分得出

$$(\delta\mathscr{F})_T=\frac{1}{c}\int \mathbf{j}\,\delta\mathbf{A}\,dV. \tag{30.8}$$

由类似变换，可以得到

$$(\delta\widetilde{\mathscr{F}})_T=-\frac{1}{c}\int \mathbf{A}\,\delta\mathbf{j}\,dV. \tag{30.9}$$

有趣的是，在宏观电动力学的数学表述形式中，电流——磁場源——所起的作用类似于电場源的电势（但不是电荷）所起的作用。把(30.8)式和(30.9)式与电場内的类似公式：

$$(\delta\mathscr{F})_T=\int\varphi\,\delta\rho\,dV,(\delta\widetilde{\mathscr{F}})_T=-\int\rho\,\delta\varphi\,dV \tag{30.10}$$

对照，就可明显地看出这一規則[参閱(10.13)，(10.14)]。我們看到，在这些公式內，电荷和电势的排列次序与公式(30.8)、(30.9)內的电流和电势的排列次序相反。

由于电場和磁場的热力学关系式(用場强和感应强度表示)在形式上完全相同，因此，§ 18 所求得的热力学不等式也可以直接移用到磁場上。特別是我們看到，由它們可得到不等式 $s>0$。在电場的情况下，这一不等式沒有什么意义，因为它比根据其他理由所得到的 $s>1$ 这一条件要弱得多。但是，在磁場情况下，类似的不等式

$$\mu>0$$

却是很重要的，因为它是对磁导率的可能值所加上的唯一限制。

§ 31. 磁体的总自由能

在 § 11 中，我們得到了电場內电介质的总自由能 $\mathscr{F}$ 的表达式。这个量的一个热力学性质是，总自由能的变化給出場源（电荷）不变时电場对导体所作的功。在磁場內，自由能 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 起着相似的作用，因为当場源(电流)不变时，自由能的变化給出对导体所作

的功。

下面的推导过程和 § 11 內的推导完全类似。我們定义“总”自由能$\widetilde{\mathscr{F}}$为

$$\widetilde{\mathscr{F}}=\int\left(\tilde{F}+\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}\right)dV, \tag{31.1}$$

式中$\mathfrak{H}$为磁化媒质不存在时場源所产生的磁場。括号內的“+”号[代替(11.1)式的“−”号)]是由于对真空內的磁場而言，$\widetilde{\mathscr{F}}$的值为$-\int\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}dV$ [参閱(30.7)]。(31.1)式的积分对整个空間进行，包括流过电流而产生磁場的导体体积在內①。

我們現在来計算磁場发生无穷小变化时$\widetilde{\mathscr{F}}$的変化（这时保持溫度不变，同时不破坏媒质的热力学平衡）。因为$\delta\tilde{F}=-\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\delta\mathbf{H}$，所以有

$$\delta\widetilde{\mathscr{F}}=-\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{B}\delta\mathbf{H}-\mathfrak{H}\,\delta\,\mathfrak{H})\,dV=-\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{H}-\mathfrak{H})\delta\mathfrak{H}dV-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{B}(\delta\mathbf{H}-\delta\mathfrak{H})\,dV-\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{B}-\mathbf{H})\delta\mathfrak{H}dV. \tag{31.2}$$

引进場$\mathfrak{H}$的矢势$\mathfrak{A}$，在第一項內写出

$$(\mathbf{H}-\mathfrak{H})\delta\mathfrak{H}=(\mathbf{H}-\mathfrak{H})\mathrm{rot}\,\delta\mathfrak{A}=$$
$$=\mathrm{div}[\delta\mathfrak{A}(\mathbf{H}-\mathfrak{H})]+\delta\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}(\mathbf{H}-\mathfrak{H}).$$

但是按照定义，場$\mathbf{H}$和$\mathfrak{H}$是由同一电流$\mathbf{j}$所产生的，这电流在导体体积內的分布与其所产生的場无关(参閱 § 29)，也即是与周圍空間內是否存在磁体无关。因此，$\mathbf{H}$和$\mathfrak{H}$满足相同的方程：$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$，$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$，于是$\mathrm{rot}(\mathbf{H}-\mathfrak{H})=0$。把$\mathrm{div}[\delta\mathfrak{A}(\mathbf{H}-\mathfrak{H})]$的

① 在 § 11 內，我們曾假定(11.1)的积分是对整个空間进行的，其中不包括产生場的帶电导体的体积。在那里所以可以这样作是因为在帶电导体內不存在电場，但在有电流流过的导体內，存在磁場，因此在計算总自由能时不能把它除去不考慮。

积分变换为对无穷远表面的积分后变为零。

由类似方式可以证明，(31.2)式內的第二项也等于零，因此

$$\delta\widetilde{\mathscr{F}} = -\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{B}-\mathbf{H})\delta\mathfrak{H}dV = -\int\mathbf{M}\delta\mathfrak{H}dV. \quad (31.3)$$

由此可見，我們所得到的$\delta\widetilde{\mathscr{F}}$的表达式，和电場情况下$\delta\widetilde{\mathscr{F}}$的表达式(11.3) 完全相似。特别是在均匀外磁場$\mathfrak{H}$內，我們所得到的$d\widetilde{\mathscr{F}}$的表达式和(11.5)式相似：

$$d\widetilde{\mathscr{F}} = -\mathscr{S}dT - \mathscr{M}d\mathfrak{H}, \quad (31.4)$$

式中$\mathscr{M}$为导体的总磁矩。

在这里我們不去重复进一步的計算，仿照§11內的公式，我們写出下面的一些公式。在$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$的綫性关系下，我們得到

$$\widetilde{\mathscr{F}} - \mathscr{F}_0(V,T) = -\int\frac{1}{2}\mathfrak{H}\mathbf{M}dV. \quad (31.5)$$

特别是在均匀外場內，

$$\widetilde{\mathscr{F}} - \mathscr{F}_0(V,T) = -\frac{1}{2}\mathfrak{H}\mathscr{M}. \quad (31.6)$$

在$\mathbf{B}$和$\mathbf{H}$为任意关系的普遍情况下，我們可以利用下面的公式計算$\widetilde{\mathscr{F}}$：

$$\widetilde{\mathscr{F}} = \int\left(\widetilde{F} + \frac{\mathbf{HB}}{8\pi} - \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathfrak{H}\right)dV =$$

$$= \int\left(F - \frac{\mathbf{HB}}{8\pi} - \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathfrak{H}\right)dV. \quad (31.7)$$

§11內曾給出了电介质极化率很小时的簡化公式。由于上面提到的大多数导体的磁化率都很小，因此对磁場来說，类似情况显得特别重要。这时我們有

$$\widetilde{\mathscr{F}} - \mathscr{F}_0 = -\frac{\chi}{2}\int\mathfrak{H}^2\,dV. \quad (31.8)$$

对磁場而言，也可得到与§14类似的結果。这即是指磁导率μ发生无穷小变化时所引起的磁体的热力学量的变化：这时假定

場源不变。由上面所述可知，代替$\mathscr{F}$的变化(如 § 14 内一样)，我們現在必須研究$\widetilde{\mathscr{F}}$的变化。我們在这里不去重复推导过程，它和(14.1)式的推导完全相似。于是得到下面的結果:

$$\delta\widetilde{\mathscr{F}} = -\int \delta\mu\frac{H^2}{8\pi}dV. \tag{31.9}$$

在 § 14 内曾根据上式作出結論: 物质的电极化率是正的。但是在磁場的情况下，却不能作出这样的推論，因为磁化率可以有正号，也可以有負号。这一重大差别的原因是，磁場內运动电荷系統的哈密頓函数，不但包含場的綫性項(如在电場情况一样)，而且也包含場的二次項。因此，按照(14.2)式，利用微扰理論求磁場內物体的自由能变化时，不但第二近似項作出貢献，第一近似項也有貢献。这时对变化的正負号不能作出任何一般的推論。例如在順磁体內，它取正值，而在抗磁体內則取負值。

在 § 14 内曾对导体在电場內的运动方向作出結論。从 (31.9)式，也可以得到类似的推論。但是由于μ可以大于 1，也可以小于1，因此导体在磁場內的运动方向不是一律的。例如在准均匀場內，順磁体 ($\mu>1$) 向場强增加方向移动，而抗磁体($\mu<1$)，則向H減小方向移动。

§ 32. 电流系統的能量

我們来研究通有电流的导体系統。我們假定无論导体或导体所在的媒质，都不是铁磁性的，于是处处 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$。按照 § 30，导体系統的总自由能可用电流所产生的磁場来表示，即

$$\mathscr{F} = \frac{1}{8\pi}\mathbf{HB}\,dV. \tag{32.1}$$

我們这里略去了常数$\mathscr{F}_0$(导体溫度保持不变)，因为它与电流沒有关系。(32.1)式的积分对整个空間进行，旣包含导体的体积，也包含导体外的空間。

这自由能也可用电流来表示，即表示为积分：

$$\mathscr{F}=\frac{1}{2c}\int \mathbf{A}\mathbf{j}\,dV \tag{32.2}$$

[与从(30.2)式化到(30.8)式比較]。上式的积分只对导体的体积进行，因为在导体外，$\mathbf{j}=0$。

由于場方程是綫性的，因此可以把磁場写成由每一电流所分別产生的磁場之和的形式，这时假定其余导体內沒有电流：$\mathbf{H}=\sum \mathbf{H}_a$。于是，总自由能(32.1)式的形式变为

$$\mathscr{F}=\sum_a \mathscr{F}_{aa}+\sum_{a>b}\mathscr{F}_{ab}, \tag{32.3}$$

式中

$$\mathscr{F}_{aa}=\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{H}_a\mathbf{B}_a dV,$$

$$\mathscr{F}_{ab}=\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}_a\mathbf{B}_b dV \tag{32.4}$$

(在 $\mathscr{F}_{ab}=\mathscr{F}_{ba}$ 中，已考虑到 $\mathbf{H}_a\mathbf{B}_b=\mu\mathbf{H}_a\mathbf{H}_b=\mathbf{H}_b\mathbf{B}_a$，式中 μ 是空間各点处的磁导率)。量 $\mathscr{F}_{aa}$ 可以称为第 a 个导体內的电流的本征自由能，而 $\mathscr{F}_{ab}$ 可称为导体 a 和 b 的相互作用能。但是必須注意，只有略去了导体本身和媒质的磁性质后，这些名称才具有原来字面的意义。反之，每一电流的場(因而其能量)也与其余导体的位置和磁导率有关。

(32.4)式內的量，按照(32.2)式，也可用每个导体內的电流 $\mathbf{j}_a$ 来表示：

$$\mathscr{F}_{aa}=\frac{1}{2c}\int \mathbf{j}_a\mathbf{A}_a dV_a,$$

$$\mathscr{F}_{ab}=\frac{1}{c}\int \mathbf{j}_a\mathbf{A}_b dV_a=\frac{1}{c}\int \mathbf{j}_b\mathbf{A}_a dV_b. \tag{32.5}$$

$\mathscr{F}_{aa}$ 內的积分，只对第 a 个导体的体积进行，而 $\mathscr{F}_{ab}$ 可表示为两个表达式中任何一个的形式，其中积分分别对导体 a 或导体 b 的体

积进行。

当电流密度在导体体积内的分布有一定規律时，$\mathscr{F}_{ab}$ 值只与流过导体截面上的总电流强度 J_a 有关。这时与量 J_a 成正比的不只是电流密度 $\mathbf{j}$，而且还有电流所产生的場。因此，整个积分 $\mathscr{F}_{aa}$ 与 J_a^2 成正比。我們把它写成

$$\mathscr{F}_{aa}=\frac{1}{2c^2}L_{aa}J_a^2, \tag{32.6}$$

式中的 L_{aa} 称为导体的自感系数。由类似方式，两电流的相互作用能与 J_aJ_b 的乘积成正比：

$$\mathscr{F}_{ab}=\frac{1}{c^2}L_{ab}J_aJ_b. \tag{32.7}$$

量 L_{ab} 称为导体的互感系数。由此可見，电流系統的总自由能为

$$\mathscr{F}=\frac{1}{2c^2}\sum_a L_{aa}J_a^2+\frac{1}{c^2}\sum_{a>b}L_{ab}J_aJ_b=$$

$$=\frac{1}{2c^2}\sum_a\sum_b L_{ab}J_aJ_b. \tag{32.8}$$

这个二次式必須取正値的条件，对其中的系数值加上一系列的限制。特別是，全部的 $L_{aa}>0$，而

$$L_{aa}L_{bb}>L_{ab}^2.$$

在导体为任意大小的普遍情况下，电流能量的計算要求求出場方程的完全解，而这是一个很复杂的問題。但是，如果导体本身或媒质的磁导率可以假定等于1，那末問題可得到簡化。我們注意到，这时电流的能量一般不再依賴于导体的热力学状态（特别是依賴于它的溫度），因此，在上面得到的全部公式內所說的自由能，也可以簡单地指能量。

当 $\mu=1$，电流 $\mathbf{j}$ 所产生的場的矢势由(29.12)式得出。因此，我們得到导体的自由能为

$$\mathscr{F}_{aa}=\frac{1}{2c^2}\iint\frac{\mathbf{j}\mathbf{j}'}{R}dVdV',\tag{32.9}$$

式中两个积分都是对給定导体的体积进行，而 R 是 dV 和 dV' 之間的距离。由类似方式，两导体的相互作用能为

$$\mathscr{F}_{ab}=\frac{1}{c^2}\iint\frac{\mathbf{j}_a\mathbf{j}_b}{R}dV_a dV_b,\tag{32.10}$$

式中 dV_a 和 dV_b 是每个导体的体积元。

特别是两綫电流的相互作用能可以极簡单地計算出来。从体电流化为 (32.10) 內的綫电流，只要分别用 $J_a d\mathbf{l}_a$ 和 $J_b d\mathbf{l}_b$ 代换 $\mathbf{j}_a dV_a$ 和 $\mathbf{j}_b dV_b$ 就可得到，而且我們发现，互感系数为

$$L_{ab}=\oint\oint\frac{d\mathbf{l}_a d\mathbf{l}_b}{R}.$$

因此，在这种近似內，L_{ab} 只依賴于两迴路的形状、綫度和相互位置，而与电流沿导綫截面的分布无关。应着重指出，在綫导体的情况下，要得到这样簡单的式子，甚至并不需要假定 $\mu=1$。在我們略去导綫粗度的近似內，导綫材料的磁性质一般并不影响它們所产生的場，因此，也不影响它們的相互作用能。但是，如果导綫周圍媒质的磁导率 μ 不为 1，则按照 (29.15)式，它簡单地使磁場的矢势值(同时也使磁感应)增加 μ 倍。因此，相互感应系数也增加同样多的倍数，于是

$$L_{ab}=\mu\oint\oint\frac{d\mathbf{l}_a d\mathbf{l}_b}{R}.\tag{32.11}$$

計算綫导体的互感系数则要困难得多。这問題将留待下一节研究。

綫电流系統的总能量还可写成另一种形式。为此，我們再回到(32.2)的积分，在綫电流的情况下，它的形式为

$$\mathscr{F}=\frac{1}{2c}\sum_a J_a\oint\mathbf{A}d\mathbf{l}_a,\tag{32.12}$$

式中 $\mathbf{A}$ 为第 a 个导体在 $d\mathbf{l}_a$ 点处的总場的矢势。从(32.2)式变换到(32.12)式所引起的主要誤差，在于略去了导綫横截面上的場变化(包括电流的本征場在內)。(32.12)內的每一迴路积分可以变换为面积分:

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}_a = \int \operatorname{rot}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{f}_a = \int \mathbf{B} d\mathbf{f}_a,$$

也即是它代表通过第 a 个电流迴路的磁感应通量(或者一般称为磁通量)。我們用 Φ_a 表示这通量。于是

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \Phi_a. \tag{32.13}$$

由类似方式，外磁場內綫电流 J 的自由能 $\mathscr{F}$，也即是不包括場源本征能的能量，可用磁通量来表示，显然

$$\mathscr{F} = \frac{1}{c} J \Phi, \tag{32.14}$$

式中 Φ 是通过电流 J 迴路的外場通量。如果外場是均匀的(而在媒质內，$\mu=1$)，則 $\Phi = \mathfrak{H} \int d\mathbf{f}$。按照(29.18)式引入电流的磁矩，我們得到 $\mathscr{F} = \mathscr{M}\mathfrak{H}$。

知道了电流系統的能量与导綫綫度、形状和相互位置的关系式后，由簡单地对相应的坐标求微分，就可求出作用在导体上的力。但是这时发生的問題是，取微分时必須假定电流的那种特性保持不变。最方便的是保持电流不变进行計算。但是在这种情况下，量 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 表示自由能。因此，在广义坐标 q“上”所作用的广义力 F_q 为

$$F_q = -\left(\frac{\partial \widetilde{\mathscr{F}}}{\partial q}\right)_{J,T}.$$

导数的下角标表示，取微分时保持电流强度和导体的溫度不变。因为在自由能內我們略去了与电流无关的不变部分，因此，$\mathscr{F}$ 和 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 只相差一个正負号，于是

$$F_q = -\left(\frac{\partial \widetilde{\mathscr{F}}}{\partial q}\right)_J = \left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial q}\right)_J = \frac{1}{2c^2}\sum_{a\,b} J_a J_b \frac{\partial L_{ab}}{\partial q} \tag{32.15}$$

(在这里和下面，为了簡单起見，我們略去了导数的下角标 T)。

特别是，导体的本征磁場作用在导体上的力由下式得出：

$$F_q = \frac{1}{2c^2} J^2 \frac{\partial L}{\partial q}, \tag{32.16}$$

式中 L 是导体的自感。从下面所述可以預先看出这些力的作用的特征。当电流强度（和温度）保持給定值时，量 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 趋近于最小值。因为在現在的情况下，$\widetilde{\mathscr{F}} = -\frac{LJ^2}{2c^2}$，因此这表明作用在导体上的力趋向于使导体的自感系数增大。但是后者是长度量綱的量，因此与导体的綫度成正比。由此可見，在磁場的作用下，导体的体积增加。

对于在外磁場內的电流，我們得到[①]

$$\widetilde{\mathscr{F}} = -\mathscr{F} = -\mathscr{M}\mathfrak{H}. \tag{32.17}$$

在上面得到的全部能量公式內，我們假定了磁感应强度和磁場强度之間存在綫性关系。在这种关系为任意形式的普遍情况下，可以建立类似的微分关系式。場发生无穷小变化时所引起的自由能变化(保持溫度不变)，按照(30.8)式为

$$\delta\mathscr{F} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\,\delta\mathbf{A}\,dV,$$

或者对綫电流而言，

$$\delta\mathscr{F} = \frac{1}{c}\sum_a J_a \oint \delta\mathbf{A}\,d\mathbf{l}_a.$$

其次，如同从(32.12)式变换到(32.13)式一样，变换后我們得到

① 在这里［与(31.6)式比較］沒有因子 1/2 是因为 (32.15) 式內电流的磁矩是一个常数，与場无关。而且(31.6)式內出現的磁体本身的磁矩只能在場的作用下发生。

$$\delta\mathscr{F}=\frac{1}{c}\sum_a J_a\delta\Phi_a. \tag{32.18}$$

由类似方式，从(30.9)式求得

$$\delta\widetilde{\mathscr{F}}=-\frac{1}{c}\sum_a \Phi_a\delta J_a. \tag{32.19}$$

由此可以說，对于綫电流系統而言，$\mathscr{F}$是对于磁通量的热力学势，而$\widetilde{\mathscr{F}}$是对于电流强度的热力学势，而且这两种势的相互关系式为

$$\widetilde{\mathscr{F}}=\mathscr{F}-\frac{1}{c}\sum_a J_a\Phi_a. \tag{32.20}$$

由此可見，对于物质的任何磁性质，下面的热力学关系式都正确：

$$\frac{1}{c}J_a=\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\Phi_a},\quad \frac{1}{c}\Phi_a=-\frac{\partial\widetilde{\mathscr{F}}}{\partial J_a} \tag{32.21}$$

如果把这些公式应用到綫性关系的情形中，即当$\mathscr{F}$由(32.8)式得出时，于是我們得到

$$\Phi_a=\frac{1}{c}\sum_b L_{ab}J_b. \tag{32.22}$$

由此可見，感应系数是磁通量和产生磁場的电流强度之間的比例系数。乘积$\frac{L_{ab}J_b}{c}$是电流$J_b(b\neq a)$所产生的通过电流迴路J_a的磁通量，而$\frac{L_{aa}J_a}{c}$是由电流J_a所产生的通过同一迴路的磁通量。

§33. 綫导体的自感

在計算綫导体的自感系数时，不能完全略去导綫的粗度，如我們在計算两个导体的互感时所作的一样。这样做之后，从(32.9)式，我們得到自感为

$$L=\oint\oint\frac{d\mathbf{l}d\mathbf{l}'}{R},$$

式中的两个积分对相同的迴路进行；但是这积分当 $R \to 0$ 时是对数发散的。

导体的自感的精确数值，取决于导体內电流的分布状态；电流的激励方式不同，电流的分布也不同，也即是它随电动势加到导体上的方式而变化。但在綫导体的情况下，在相当大的精确程度上，自感并不依赖于导体截面上的电流分布規律[①]。

我們把自感写成相加的形式：$L = L_e + L_i$，此处的 L_e 和 L_i 是分别由导体內和导体外的磁場能所引起的。在綫导体內，自感的主要部分是"外"部分 L_e。这是因为閉合綫路磁場能的主要部分是在离导体很远（与它的粗度比較）的場內。实际上，无限长的直导綫每单位长度上的能量由下列积分得出

$$\frac{\mu_e}{8\pi}\int H^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_e}{8\pi}\int\left(\frac{2J}{cr}\right)^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_e J^2}{c^2}\int\frac{dr}{r}$$

（r 为至导綫軸的距离，μ_e 是外部媒质的磁导率）。当 r 很大时，这积分是对数发散的。当然，对閉合綫路而言，这种发散性不存在，因为积分在与綫路綫度同数量級的距离上被"切断了"。将上面的积分乘上导綫的总长度 l，并取 l 值为上限（下限等于导綫的半徑 a），我們得到能量的近似值为

$$\frac{\mu_e J^2}{c^2} l \ln\frac{l}{a}.$$

由此得到自感为

$$L = 2\mu_e l \ln\frac{l}{a}. \tag{33.1}$$

---

① 更精确地說，它不依賴于电流分布，只要这时电流密度只在与导綫粗度 a 相比的距离上有重大变化。但是，如果电流的分布为：在小于 a 的距离上，电流密度也有重大变化（如由于特殊原因：在趋肤效应和超导体內发生的情况），則导綫的自感也发生变化。

大家知道，这个式子具有对数精确性，它的相对誤差为$\frac{1}{\ln\left(\frac{l}{a}\right)}$的数量級，而比值$\frac{l}{a}$在假定它的对数大时也一样大①。

綫圈（螺旋管）是綫导体的一种特例，它是用导綫繞成螺旋形，而相邻两匝的距离极其接近。如果我們略去导綫的粗度和相邻两匝間的距离，我們就簡单地得到一个柱形导电面，其中有“表面”傳导电流流过。适合导体内的方程 $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$，在这种情况下，可簡单地代以边界条件：

$$[\mathbf{n},\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{g}. \tag{33.2}$$

式中 $\mathbf{g}$ 是面电流密度，$\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_2$ 是螺旋管表面两边的磁場强度，法綫 $\mathbf{n}$ 指向媒质 2 的內部[比較(27.14)式的推导]。

如果螺旋管是无限长的柱体，那末求出这种螺旋管所产生的磁場是非常簡单的。表面电流是环流的，而电流密度为 $g=nJ$，此处 J 为流过导綫的电流，而 n 为螺旋管单位长度上的匝数。柱体外的磁場为零，而柱体內的磁場是均匀的，指向柱体軸的方向，并等于

$$H=\frac{4\pi}{c}nJ.$$

实际上，在导体面外的全部空間內，这磁場显式地滿足方程 $\mathrm{div}\,\mathbf{H}=0$ 和 $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=0$ 以及表面的边界条件(33.2)式。

与此相应，柱体单位长度上的場能为

---

① 上面所指出的自感不依賴于电流分布的說法，实际上不但适用于近似式(33.1)，而且也适用于計及不包含大对数的項的以下的近似（这相当于在对数宗量內計及$\frac{l}{a}$前面的系数）；参閱本节的例題。

$$\frac{\mu_e H^2}{8\pi}\pi b^2=\frac{2\pi^2 n^2 b^2 \mu_e}{c^2}J^2$$

(b 为柱体半徑; μ_e 屬于充滿螺旋管內的媒质)。略去两端的場畸变，也可以把这个公式应用到有限长度 h(与 b 比較)的螺旋管上。于是我們得到自感为

$$L=4\pi^2 n^2 b^2 h\mu_e=2\pi\mu_e nbl, \tag{33.3}$$

式中 $l=2\pi bnh$ 是綫圈內导綫的总长度。与未纏繞的同样长导綫的自感比較，螺旋管自感的增大[比較(33.3)与(33.1)]是距离很近的綫匝之間存在互感的自然結果。

例 題[①]

1. 試求圓截面的閉合細导綫的自感。

解. 可以认为导綫內的磁場和无限长直柱体內的磁場一样，設为

$$H=\frac{2Jr}{ca^2}$$

(r是至导綫軸的距离，a是导綫的半徑)。由此求得自感的內部份为

$$L_i=\frac{2c^2}{J^2}\frac{\mu_i}{8\pi}\int H^2 dV=\frac{l\mu_i}{2}, \tag{1}$$

式中 l 为閉合导綫的长度。

計算 L_e 时注意到，細导綫外的場与导綫截面上的电流分布无关。特別是，如果假定电流只在导綫表面流过，則外磁場的能量 $\mathscr{F}_e$ 不变。但是，这时在导綫內部，$\mathbf{H}=0$，因此，可以从(32.2)式算出作为总能量的能量 $\mathscr{F}_e$。

由于假定电流沿表面分布，因此在这个式子內的积分，实际上变成沿导綫軸綫进行的綫积分，于是求得自感的外部份为

$$L_e=\frac{2c^2}{J^2}\frac{J}{2c}\oint \mathbf{A}|_{r=a}d\mathbf{l},$$

此处被积式內的 $\mathbf{A}$ 值取在导体的表面上。在变换到这式子时还必須注意到，在我們所考虑的近似下，导綫圓截面周长上的磁場是不变的。

① 在例題 1—6 中，假定媒质的磁化率为 $\mu_e=1$。

其次，因問題已归結为求出 $\mathbf{A}|_{r=a}$，因此我們对电流的分布再作一个假設：假設全部电流都在导綫的軸綫上流过。在所考慮的近似下，导綫表面上的場值，并不因这一假定而改变（在圓截面直导綫的情况下，它也完全不改变）。于是，按照(19.14)式，我們有

$$\mathbf{A}\Big|_{r=a}=\frac{J}{c}\oint\frac{d\mathbf{l}}{R}\Big|_{r=a},$$

式中 R 是从导綫的軸綫元 $d\mathbf{l}$ 至其表面一定点的距离。把积分分为两部份，即分别相应于 $R>\Delta$ 和 $R<\Delta$，其中 Δ 为小于电流迴路綫度而大于导綫半徑 a 的某一长度①。在积分区域为 $R>\Delta$ 的积分內，可以略去 a，并把 R 簡单地理解为电流迴路上两点間的距离。在区域为 $R<\Delta$ 的积分內，可以假定矢量积分的方向为迴路某一点处的切綫方向。用 $\mathbf{t}$ 表示这方向上的单位矢量，我們写出

$$\int\limits_{R<\Delta}\frac{d\mathbf{l}}{R}\Big|_{r=a}\cong\mathbf{t}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\frac{dl}{\sqrt{a^2+l^2}}=2\mathbf{t}\,\mathrm{Arsh}\frac{\Delta}{a}\cong2\mathbf{t}\ln\frac{2\Delta}{a}.$$

这个式子可以重新写成下列积分的形式：

$$2\mathbf{t}\ln\frac{2\Delta}{a}\cong\int\limits_{\Delta>R>\frac{2}{a}}\frac{d\mathbf{l}}{R},$$

式中的 R 仍理解为电流迴路上两点間的距离。由此可見，与 $R>\Delta$ 区域內的积分相加，就得到下列表达式：

$$\mathbf{A}|_{r=a}=\frac{J}{c}\int\limits_{R>\frac{a}{2}}\frac{d\mathbf{l}}{R},$$

从这式子內已消去了任意参数 Δ，这正是应該的。

于是，最后得到

$$L_e=\iint\limits_{R>\frac{a}{2}}\frac{d\mathbf{l}d\mathbf{l}'}{R}.\tag{2}$$

① 类似方法曾应用到 §2 例題 4 計算細圓环的电容。

这里的积分遍及迴路上其距离超过$\frac{a}{2}$的所有各成对的点。

2. 試求圓截面导綫(半徑为 a)作成的細圓环(半徑为 b)的自感。

解. 例題 1 公式(2)內的被积式只与圓环上的弦 R 所張的中心角 φ 有关，而且 $R=2b\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$，但$d\mathbf{l}d\mathbf{l}'=dl\cdot dl'\cos\varphi$。因此我們得到

$$L_e=2\int_{\varphi_0}^{\pi}\frac{\cos\varphi\cdot 2\pi b\cdot bd\varphi}{2b\sin\frac{\varphi}{2}}=4\pi b\left[-\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{4}-2\cos\frac{\varphi_0}{2}\right].$$

积分下限由 $2b\sin\frac{\varphi_0}{2}=\frac{a}{2}$定出，由此得 $\varphi_0\cong a/2b$。代入这个值，并与 $L_i=\pi b\mu_i$ 相加，就得到滿足所需的精确度的数值为

$$L=4\pi b\left(\ln\frac{8b}{a}-2+\frac{\mu_i}{4}\right).$$

特别是当 $\mu_i=1$ 时，

$$L=4\pi b\left(\ln\frac{8b}{a}-\frac{7}{4}\right).$$

3. 設圓环导綫內通有电流，試求圓环导綫($\mu_i=1$)在这电流的磁場作用下的伸长。

解. 作用于导綫軸上并与导綫軸垂直的內应力，按照(32.16)式，分别由下式求出：

$$\pi a^2\sigma_{\parallel}=\frac{J^2}{2c^2}\frac{\partial L}{\partial(2\pi b)};\quad 2\pi ab\sigma_{\perp}=\frac{J^2}{2c^2}\frac{\partial L}{\partial a}.$$

代入前一題內的 L 值，我們得到

$$\sigma_{\parallel}=\frac{J^2}{\pi a^2c^2}\left(\ln\frac{8b}{a}-\frac{3}{4}\right),\quad \sigma_{\perp}=-\frac{J^2}{a^2c^2}.$$

由此求得圓环的相对伸长为①

$$\frac{\Delta b}{b}=\frac{1}{E}(\sigma_{\parallel}-2\sigma\sigma_{\perp})=\frac{J^2}{\pi a^2c^2E}\left(\ln\frac{8b}{a}-\frac{3}{4}+2\pi\sigma\right)$$

(E 为楊氏模量，σ 为导綫材料的泊松系数)。

4. 試求由圓截面(半徑为 a 和 b)的两平行直导綫($\mu_i=1$)所組成的双导綫每单位长度上的自感，两导綫的軸綫相距 h，而且导綫內有大小相等、方向相反的电流 J 流过(图 18)。

① 参閱“連續介質力学”第二版，第二部份 § 5。

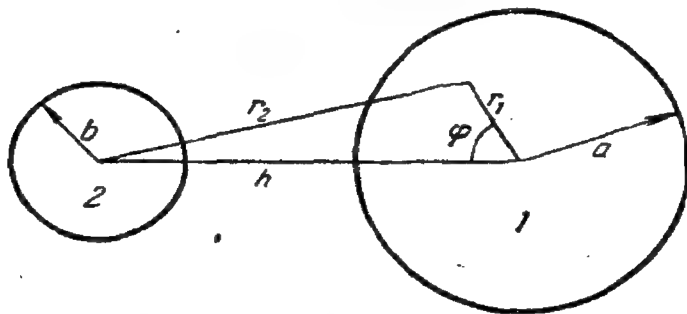


图 18

解. 每一电流的磁場的矢势方向与导綫軸平行，因此两磁場的矢势可以簡单地代数相加。于是我們得到电流 $+J$ 均匀分布的导綫 1 的磁場(用柱面坐标表示)为

$$A_z=\frac{J}{c}\left(C-\frac{r^2}{a^2}\right),\quad 当 r<a,$$

$$A_z=\frac{J}{c}\left(C-1-2\ln\frac{r}{a}\right),\quad 当 r>a$$

式中 C 是任意常数；在导綫边界上，A_z是連續的。用 b 代替 a，并改变 J 的正負号，就得到导綫 2 所产生的磁場的相似公式。在(32.2)式內，对导綫 1 的截面面积进行积分，得到

$$\frac{J^2}{2c^2\pi a^2}\int\left\{\left(C-\frac{r_1^2}{a^2}\right)-\left(C-1-2\ln\frac{r_2}{b}\right)\right\}df_1=$$

$$=\frac{J^2}{2c^2\pi a^2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\left\{1-\frac{r_1^2}{a^2}+\ln\frac{h^2+r_1^2-2hr_1\cos\varphi}{b^2}\right\}r_1d\varphi dr_1=$$

$$=\frac{J^2}{2c^2}\left(\frac{1}{2}+2\ln\frac{h}{b}\right).$$

对导綫 2 的截面进行积分，得到相同的表达式，只是其中用 a 代换了 b。因此，所求的双导綫单位长度的自感为

$$L=1+2\ln\frac{h^2}{ab}.$$

5. 試求超环面螺旋管的自感。

解. 我們把螺旋管看作超环面形的导电面，面內流过的面电流密度为

$$g=\frac{NJ}{2\pi r}$$

(N为导綫的总匝数，J是其中的电流，所取坐标和綫度如图 19 所示)。螺旋

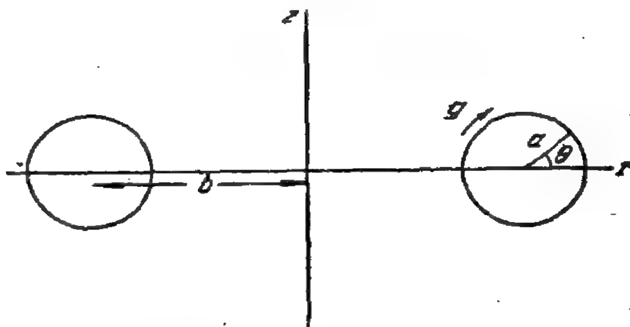


图 19

管外的磁場为 $\mathbf{H}_e=0$，而螺旋管內的磁場为

$$H_{ir}=H_{iz}=0,$$

$$H_{i\varphi}=\frac{2NJ}{cr}$$

(r, z, φ 为柱面坐标)。实际上，这解滿足方程 $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$, $\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$ 以及边界条件(33.2)①。螺旋管內的磁場能为

$$\int\frac{H_i^2}{8\pi}dV=\frac{N^2J^2}{c^2}\oint\frac{z\,dr}{r};$$

积分对圓环截面的周界进行，按照 $z=a\sin\theta$, $r=b+a\cos\theta$ 引入 θ 角后，这积分很容易进行。結果得到自感为

$$L=4\pi N^2(b-\sqrt{b^2-a^2}).$$

6. 試求柱形螺旋管两端附近的場畸变所引起的对柱形螺旋管自感公式(33.3)的 $\frac{l}{h}$ 为一次的改正值($\mu_e=1$)。

解. 算出螺旋管的自感为对它表面的重积分：

$$L=\frac{1}{J^2}\iint\frac{\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2}{R}df_1df_2.$$

式中 $\mathbf{g}$ 是面电流密度($\mathbf{g}=nJ$)。采用柱面坐标表示为

$$L=2\pi b^2n^2\int_0^h\int_0^h\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi\,dz_1\,dz_2}{\sqrt{(z_2-z_1)^2+4b^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}}=$$

$$=8\pi b^2n^2\int_0^h\int_0^\pi\frac{(h-\zeta)\cos\varphi\,d\varphi\,d\zeta}{\sqrt{\zeta^2+4b^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

① 这式子对非圓形的任意截面的环形螺旋管，也是适用的。

(φ 为通过 df_1 和 df_2 的对角面間的夹角)。

对 dl 进行积分，当 $h\gg b$ 时，我們得到

$$L\cong 8\pi b^2 n^2\int_0^{\pi}\left[h\ln\frac{h}{b\sin\frac{\varphi}{2}}-h+2b\sin\frac{\varphi}{2}\right]\cos\varphi d\varphi,$$

最后有

$$L=4\pi^2 b^2 n^2\left[h-\frac{8}{3\pi}b\right].$$

7. 如果将平面迴路放在磁导率为 μ_e 的半无限媒质的表面上，試求平面綫路自感改变的倍数。我們略去导綫自感的內部份。

解. 从对称性看出，媒质不存在时，电流的磁場对迴路平面是对称的，而磁力綫与这平面垂直相交。令这磁場为 $\mathbf{H}_0$。如果在空的半空間內，我們令 $\mathbf{H}=\frac{2\mu_e}{\mu_e+1}\mathbf{H}_0$，而在媒质內，令 $\mathbf{B}=\mu_e\mathbf{H}=\frac{2\mu_e}{\mu_e+1}\mathbf{H}_0$，則我們就可以使半无限媒质表面上的磁場方程和边界条件得到滿足。实际上，这一点保证了 B_n 和 $\mathbf{H}_t$ 在边界面上是連續的，而将 $\mathbf{H}$ 沿任何力綫循环一周，与 $\mathbf{H}_0$ 沿相同路綫循环一周相等。由此得出結論，引入媒质后，总場能，因而也即是綫路的自感都增加

$$\frac{2\mu_e}{\mu_e+1}倍。$$

§34. 磁場內的力

要求出磁場內物质上所受的力，由于它和电場的情况完全相似，因此我們几乎不需要进行新的計算。这种相似性首先是因为磁場內热力学量的表达式和电場內的表达式不同的地方，只是分别用字母 $\mathbf{H}, \mathbf{B}$ 代替了字母 $\mathbf{E}, \mathbf{D}$ 而已。在 §15 內計算应力張量时，我們曾經利用电場是一势場(这是从方程 $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$ 得到的結果)。但磁場滿足方程:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{34.1}$$

这方程只当傳导电流不存在时才变成 $\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$。但是，計算应力

張量时，一般总是假定 $\mathbf{j}=0$。因为 $\mathbf{j}$ 含有磁場的导数，因此在計算应力張量时所以計及电流，表明在应力張量 σ_{ik} 內加入一个由磁場的不均匀性所引起的无限小改正項(比較 93 頁的底注)。

这样一来，在 §§15 和 16 內所得到的应力張量的全部公式，就可以直接移用到磁場上。例如，在 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 的綫性关系下，在流体媒质內，我們得到

$$\sigma_{ik}=-p_0(\rho,T)\delta_{ik}-\frac{H^2}{8\pi}\left[\mu-\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right]\delta_{ik}+\frac{\mu H_i H_k}{4\pi}. \tag{34.2}$$

根据 $f_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}$，由此可以算出体积力。如果媒质是导电的，并且有电流流过，則計算工作和 §15 的不同处，只在于以方程(34.1)代替方程 $\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$。

把(34.2)式微分，并考虑到恒等式 $\operatorname{div}\mathbf{B}=\operatorname{div}(\mu\mathbf{H})=0$，我們得到

$$\mathbf{f}=-\nabla p_0+\frac{1}{8\pi}\nabla\left[H^2\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right]-\frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu-\frac{\mu}{8\pi}\nabla H^2+$$
$$+\frac{\mu}{4\pi}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}.$$

但是，由熟知的矢量分析公式：

$$(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}=\frac{1}{2}\operatorname{grad}H^2-[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}]=\frac{1}{2}\operatorname{grad}H^2+\frac{4\pi}{c}[\mathbf{jH}],$$

因此最后有

$$\mathbf{f}=-\nabla p_0+\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left[H^2\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right]-\frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu+$$
$$+\frac{\mu}{c}[\mathbf{jH}]. \tag{34.3}$$

与类似的公式(15.12)比較，这里多增加了一項(最后一項)。但是，如果认为这一項的出現表明，在物理上可以从 $\mathbf{f}$ 內将傳导电

流所引起的力与其他的效应区分开来，这却是不正确的。問題在于，由于方程(34.1)，我們不可能将电流 $\mathbf{j}$ 与場的不均匀性分开，而磁場对坐标的导数也包含在(34.3)式的其他項內。因此，当物质的磁导率显著地大于1时，(34.3)式的各項，一般說来为同一数量級。

但是如通常的情况一样，若 μ 接近1，則傳导电流存在时，(34.3)式內的最后一項对力作出主要貢献，而其余各項与它比較，都不过是很微小的修正。于是計算磁場內的力，可以假定 $\mu=1$，因而簡单地我們有

$$\mathbf{f}=\frac{1}{c}[\mathbf{jH}] \tag{34.4}$$

$(-\nabla p_0$ 这一項在这里和下面，我們都不感兴趣，因此把它略去了)。当 $\mu=1$ 时，物质的性质一般对磁現象无任何影响，因此，磁場內力的表达式(34.4)，无論对液态导体或固态导体，都同样适用。于是作用在磁場內通有电流的导体上的总力，由下列积分得出：

$$\mathbf{F}=\frac{1}{c}\int[\mathbf{jH}]dV. \tag{34.5}$$

当然，直接根据熟知的洛倫茲力的表达式，也可以非常簡单地得到(34.4)式。磁場內静止导体所受的宏观力，不外乎是由微观磁場 $\mathbf{h}$ 作用在导体內带电粒子上的洛倫茲力的平均值：

$$\mathbf{f}=\frac{1}{c}[\overline{\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{h}}].$$

但是，若 $\mu=1$，則磁場 $\mathbf{h}$ 和平均磁場 $\mathbf{H}$ 相等，而平均值 $\rho\mathbf{v}$ 和傳导电流密度相等。

当导体运动时，(34.4)式的力就对导体作一定的机械功。初看起来好像表明，这和洛倫茲力对运动的电荷不作功有矛盾。实际上，当然不存在任何矛盾，因为在运动的导体內，洛倫茲力所作的功不但包含机械功，而且也包含导体运动时导体內所感应的电

动势所作的功，这两种功大小相等，而正負号相反(参閱第 284 頁上的底注)。

在(34. 4)式內，**H** 是外电源和受到(34. 4)式的力所作用的电流本身所共同产生的磁場的眞实値。但是从(34. 5)式計算总力时，我們可以把 **H** 簡单地理解为是通有电流的导体所在的外磁場 $\mathfrak{H}$。該导体本身所产生的場，由于动量守恒定律，对导体所受到的总力沒有貢献。

对綫导体而言，力的計算尤其簡单。物质的磁性质一般不重要；如果在媒质內 $\mu=1$，則作用在綫导体上的总力由綫积分得出：

$$\mathbf{F}=\frac{J}{c}\oint[d\mathbf{l}\mathfrak{H}]. \tag{34. 6}$$

这个式子也可以写成对电流迴路所圍成的面积的积分形式。按照斯托克斯定理，用算符 $[d\mathbf{f}\nabla]$ 代替 $d\mathbf{l}$，我們得到

$$\oint[d\mathbf{l}\mathfrak{H}]=\int[[d\mathbf{f}\nabla]\mathfrak{H}].$$

其次写出

$$[[d\mathbf{f}\nabla]\mathfrak{H}]=-d\mathbf{f}\operatorname{div}\mathfrak{H}+\nabla(d\mathbf{f}\mathfrak{H})=$$
$$=-d\mathbf{f}\operatorname{div}\mathfrak{H}+[d\mathbf{f}\operatorname{rot}\mathfrak{H}]+(d\mathbf{f}\nabla)\mathfrak{H}.$$

但是 $\operatorname{div}\mathfrak{H}=0$，而在电流外的空間內，$\operatorname{rot}\mathfrak{H}=0$，于是

$$\mathbf{F}=\frac{J}{c}\int(d\mathbf{f}\nabla)\mathfrak{H}. \tag{34. 7}$$

特别是，在准均匀外磁場內，可以将 $\mathfrak{H}$ 和算符 ∇ 从积分符号下取出。再按照(29. 18)式引进电流的磁矩，于是我們得到必然的結果：

$$\mathbf{F}=(\mathcal{M}\Delta)\mathfrak{H}. \tag{34. 8}$$

因为在这式子內，$\mathcal{M}$ 是常数量，因此也可以把 **F** 写成

$$\mathbf{F}=\operatorname{grad}(\mathcal{M}\mathfrak{H}). \tag{34. 9}$$

[这和电流能量的表达式(32. 17)符合一致]。在准均匀場內，电流

所受到的力矩，容易证明等于普通的式子:

$$\mathbf{K}=[\mathscr{M}\mathfrak{H}]. \tag{34. 10}$$

例 題

試求电流为 J 的直导綫上所受的力，假設这导綫平行于半徑为 a 的无限长圓柱导体(磁导率为 μ)，并且至柱体軸的距离为 l。

解. 由于 160 頁上所指出的平面靜电学与靜磁学問題間的对应关系，改变 § 7 例題 3 的解內的符号，就可求出电流的磁場。柱体周圍空間內的場，和眞空內的电流 J 与分別通过 A 点和 O' 点(参閱图 11)的电流 $+J'$ 和 $-J'$ 所产生的場相等，而且

$$J'=J\frac{\mu-1}{\mu+2}.$$

柱体內的場，則与通过 O 点的电流

$$J''=J\frac{2}{\mu+1}$$

所产生的場相等。于是导体单位长度上所受的力为

$$F=\frac{1}{c}JB=\frac{2JJ'}{c^2}\left(\frac{1}{OA}-\frac{1}{OO'}\right)=\frac{2J^2a^2(\mu-1)}{b(b^2-a^2)(\mu+1)c^2}.$$

由类似方式，可以求得(参閱 § 7 中的例題 4)通过磁性媒质內的柱形小孔的导綫被吸向最近的小孔表面的力为

$$F=\frac{2J^2b(\mu-1)}{(a^2-b^2)(\mu+1)c^2}.$$

§ 35. 迴轉磁現象

沒有外加磁場时物体(非铁磁体)受到磁化的可能性，由于要求对时間变号的不变性，受到很大的限制。例如，有許多物体，虽然沒有外加电場，但由于受到形变，也可以发生电极化現象(压电体)。但是，“压磁現象”即使存在的話，也是非常稀少的現象(参閱 § 28 末)，而且在任何情况下，都不会发生在沒有磁性結构的物体內。

沒有外加磁場的磁化，一般說来，要求使物体发生运动。当

然，由于伽利略的相对性原理，匀速运动不会得出什么結果。但匀速轉动却可以引起物体的磁化，这种磁化与角速度 $\mathbf{\Omega}$ 成綫性关系（称为巴尔涅特效应）。矢量 $\mathscr{M}$ 和 $\mathbf{\Omega}$ 之間所以有这种关系，是因为时間变号时两者都改变正負号。因为两者都是軸矢量，因此在各向同性物体內，这种相依关系也可能存在（这时归結为 $\mathscr{M}$ 与 $\mathbf{\Omega}$ 之間的簡单的比例关系）。

除了这种效应外，还应該存在相反的效应，即自由悬挂的导体受到磁化时应开始轉动（爱因斯坦-德·哈阿斯效应）。在这两种效应間存在簡单的热力学关系，可以由以下方式得到。

大家知道[①]，在与物体一道轉动的坐标系內，物体的自由能 $\widetilde{\mathscr{F}}'$ 是相对于角速度的热力学势（保持温度和物体的体积不变）。这时物体的动量矩 $\mathbf{L}$ 等于

$$\mathbf{L}=-\frac{\partial\widetilde{\mathscr{F}}'}{\partial\mathbf{\Omega}}.\tag{35.1}$$

描写迴轉磁現象，是在自由能內加入一个附加項，这一項代表自由能展开成 $\mathbf{\Omega}$ 和导体每点处的磁化强度 $\mathscr{M}$ 的幂級数內的第一項，这一項既包含有 $\mathbf{\Omega}$，也包含有 $\mathscr{M}$。这一項是 $\mathbf{\Omega}$ 和 $\mathscr{M}$ 的綫性項，即其形式为

$$\widetilde{\mathscr{F}}'_{\text{迴轉磁}}=-\int\lambda_{ik}\Omega_i\mathscr{M}_k dV=-\lambda_{ik}\Omega_i\mathscr{M}_k,\tag{35.2}$$

式中 λ_{ik} 为恒定張量，在普遍情况下不是对称的。

按照(35.1)和(35.2)式，物体由于磁化所得到的动量矩与物体总磁矩的关系为

$$(L_{\text{迴轉磁}})_i=\lambda_{ik}\mathscr{M}_k.$$

通常代替 λ_{ik} 是采用由下式定义的逆張量:

$$g_{ik}=\frac{2mc}{e}\lambda_{ik}^{-1},$$

① 参閱"統計物理学"第三版，§26。

（e 和 m 是电子的电荷和质量）；无量綱的量 g_{ik} 称为迴轉磁系数。于是

$$\mathscr{M}_i=\frac{e}{2mc}g_{ik}(L_{\text{迴轉磁}})_k. \tag{35.3}$$

另一方面，(35.2)式指出，从对磁性质的影响来說，物体的迴轉等效于場强为 $\mathfrak{H}_i=\lambda_{ki}\Omega_k$ 或場强为

$$\mathfrak{H}_i=\frac{2mc}{e}g_{ki}^{-1}\Omega_k \tag{35.4}$$

的外磁場的作用。因此在原則上，我們能够算出由迴轉所引起的磁化。例如，若物体的磁化率 χ_{ik} 很小，則物体所得到的磁矩与物体的形状无关，而等于

$$\mathscr{M}_i=\chi_{ik}\mathfrak{H}_k=\frac{2mc}{e}\chi_{ik}g_{lk}^{-1}\Omega_l.$$

公式(35.3)和(35.4)分别对应于爱因斯坦-德·哈阿斯效应与巴尔涅特效应。我們看到，这两种效应由同一張量 g_{ik} 决定。

第五章　铁磁性

§36. 居里点附近的铁磁体

铁磁体的磁性质和铁电体的电性质之間，有着极深刻的相似性。在宏观体积內，两者都具有自发极化——磁极化或电极化。在两种情况下，当温度改变时，在第二种相变点(居里点)处，这种极化都消失。

但是铁磁現象和铁电現象之間也存在重大的差别，这种差别是由于引起自发极化的微观相互作用力的性质有所不同。在铁电体內，晶体点陣內分子間的相互作用完全是各向异性的，因而自发极化矢量与晶体內的一定取向結合得相当牢固。但在铁磁体內，自发极化的发生基本是由于原子的交換相互作用，这种相互作用一般与总磁矩相对于点陣的取向无关①。誠然，除了交換相互作用外，在原子磁矩之間还存在直接的磁相互作用。但是这种相互作用的效应为$\sim\frac{v^2}{c^2}$(v为原子速度)，因为原子磁矩本身包含有因子$\frac{1}{c}$。属于这一类相互作用的，还有原子磁矩与晶体点陣的电場的相互作用。所有这些相互作用(由于其中出現因子$\frac{1}{c^2}$，可以称为"相对論"的相互作用)，都比交換相互作用微弱得多，因而只导至

① 大家知道，交換相互作用是由于粒子系統的波函数对粒子换位具有某种对称性而产生的特别量子效应。波函数的换位对称性以及交換相互作用，只与系統的总自旋有关，而与其方向无关(参閱"量子力学"§60)。交換相互作用在铁磁体中的作用是由Я.И.弗兰克耳，Я.Г.多尔夫曼和B.金兹堡最先指出的(1928)。

晶体能量极微弱地依賴于磁化方向①。

因此，铁磁体的磁化，在第一近似下，也即是相对于基本(交换)相互作用而言，是一个守恒量。这种情况給予下面所闡述的热力学理論以更深刻的物理意义，在热力学理論內，磁化强度 M 被視为自变数，它的实际数值(作为溫度、場等的函数)以后可从相应的热平衡条件求出。

我們用 Φ_0 表示 $\mathbf{H}=0$ 时物质的单位体积的热力学势，并将它看作自变数 M(和其他热力学变数) 的函数。現在我們暫时忽略相对論的相互作用，也即是只考慮基本的交换相互作用。于是，Φ_0 只是矢量 M 的絕对值的函数，而不是它的方向的函数。

为了得到磁場 H 不为零时的热力学量，我們从下列关系式出发:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{H}}=-\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}=-\frac{\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M}}{4\pi}.$$

保持自变数 M 的值不变(并考慮到 $\mathbf{H}=0$ 时，$\tilde{\Phi}=\Phi=\Phi_0$)，将上式积分，我們得到

$$\tilde{\Phi}=\Phi_0(M)-\mathbf{MH}-\frac{H^2}{8\pi}. \qquad (36.1)$$

由此得到热力学势 Φ 为

$$\Phi=\tilde{\Phi}+\frac{\mathbf{HB}}{4\pi}=\Phi_0+\frac{H^2}{8\pi}=\Phi_0+\frac{1}{8\pi}(\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M})^2. \qquad (36.2)$$

如果忽略铁磁体的磁各向异性，当然，矢量 M 和 H 的方向相同；因此，在(36.1)和(36.2)式內，代替矢量本身，可以写出它們的絕对值。

---

① 相对論相互作用与交换相互作用的比值的数量級由下列比值得出:

$$\frac{U_{\text{各向异性}}}{N\Theta},$$

式中 $U_{\text{各向异性}}$ 称为物质单位体积的磁各向异性能（参閱下一节），N 为单位体积內的原子数，Θ 为居里点温度。这比值通常为 10^{-4}——10^{-5}。

在居里点附近，磁化强度M很小。仿照第二种相变的普遍理論[①]，我們把$\Phi_0(M)$展开为这小量的冪級数。在各向同性函数展开为矢量M的冪級数內，只包含偶次冪的項:

$$\widetilde{\Phi}=\Phi_{00}+\frac{a}{2}M^2+\frac{b}{4}M^4-MH-\frac{H^2}{8\pi}, \qquad (36.3)$$

式中Φ_{00}, a, b只是溫度(和压强)的函数。

居里点$T=\Theta$由系数a等于零定出，而且$T>\Theta$时，$a>0$，$T<\Theta$时，$a<0$[②]。在居里点附近，可以将函数$a(T)$展开为差值$(T-\Theta)$的冪級数，即写为

$$a=\alpha(T-\Theta), \qquad (36.4)$$

式中α是与溫度无关的一个正量。在居里点附近，系数b是正的，并可以代以它在$T=\Theta$时所取的值。

当$H=0$时，在居里点以上，即$a>0$时，热力学势的极小值相应于$M=0$，也即是不存在自发极化。在居里点以下，M的值由下列条件求出

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial M}=[\alpha(T-\Theta)+bM^2]M=0.$$

Φ的最小值相应于方括号內的式子变为零，由此得到

$$M=\sqrt{\frac{\alpha}{b}(\Theta-T)}. \qquad (36.5)$$

由此可見，在趋近于居里点时，自发磁化与$\sqrt{\Theta-T}$成正比地减小。

和任何第二种相变一样，在居里点处($H=0$时)的轉变，伴随有热容量的突变。略去M的高次冪，我們得到熵为

$$S=-\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial T}=S_{00}-\frac{M^2}{2}\frac{\partial a}{\partial T}=S_{00}-\frac{\alpha M^2}{2}.$$

---

① 参閱"統計物理学"第三版，第十四章。

② 相的这种温度关系，发生于所有已知的铁磁体內，虽然在热力学上不是必然的。

在非铁磁相內，$M=0$ 和 $S=S_{00}$，而在铁磁相內，M 由(36.5)式給出，于是

$$S=S_{00}+\frac{\alpha^2}{2b}(T-\Theta).$$

由此求得热容量 $C_p=T\frac{\partial S}{\partial T}$ 的突变值为

$$\Delta C_p=\frac{\alpha^2\Theta}{2b}. \tag{36.6}$$

現在設 $H\neq 0$。于是确定磁化的条件 $\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial M}=0$ 变为

$$\alpha(T-\Theta)M+bM^3=H. \tag{36.7}$$

我們定义磁化率为

$$\chi=\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{H\to 0}.$$

从(36.7)式，我們有

$$\frac{\partial M}{\partial H}[\alpha(T-\Theta)+3bM^2]=1.$$

在居里点以上，当 $H=0$ 时，$M=0$，于是

$$\chi=\frac{1}{\alpha(T-\Theta)}, \tag{36.8}$$

也即是我們得到順磁性，它的磁化率与 $T-\Theta$ 成反比(称为居里-外斯定律)。

在居里点以下，当 $H=0$ 时，M 由(36.5)式得出，于是我們得到

$$\chi=\frac{1}{2\alpha(\Theta-T)}. \tag{36.9}$$

应該記住，这个量不是一般意义上的磁化率(即 M 与 H 之間的比例系数)，因为当 $H=0$ 时，$M\neq 0$[①]。

---

① 从定量方面說，(36.8)，(36.9)式，在 $\chi\gtrless 1$ 的区域內，只是对立方系的晶体是正确的。对单軸晶体还必須考虑到所謂各向异性能量(参閱 § 37)，在这种情况下，它与 M^2 成正比，而当 M 值很小时，可与 M^2 比較，甚至超过(36.3)式內的 $\frac{aM^2}{2}$ 項。

事实上，(36.9)式的磁化率，只在居里点的紧邻近才达到1的数量級。除去这个意义很小的区域，我們可以假定，磁化强度M在磁場作用下只有很微小的变化，而在溫度不变时，可以視为不变量。这也就是下一节将要作的假定。

在这一方面，铁磁体和铁电体也有很大的差别，在铁磁体內，一般說来，甚至离居里点很远，$\frac{\partial P}{\partial E}$也不是小值。这原因仍然在于原子磁矩比分子的电偶极矩小得多的緣故。

§ 37. 磁各向异性能

如上面已指出的，铁磁体的磁性所以是各向异性的，是因为其原子之間存在較弱的相对論相互作用。在宏观理論中，描写这种各向异性，是在热力学势內引入相应的項——称为磁各向异性能，它依賴于磁化方向。

从微观理論出发，各向异性能的計算，需要应用量子力学的微扰理論，其中晶体的哈密頓函数內描写相对論相互作用的項代表微扰能量。但是不必进行这些計算，根据簡单的对称性，也可以得到这些式子的一般形式。

相对論相互作用的哈密頓函数，包含电子自旋矢量算符的一定冪次的項——一次項和二次項，称为“自旋軌道”相互作用和自旋-自旋相互作用。因此，应用微扰理論时，自然地得到各向异性能展开为磁化矢量方向余弦的冪級数的形式。另一方面，和热力学势中本身一样，各向异性能$U_{各向异性}$对时間变号也为不变量，但在这种变换中，磁化强度$\mathbf{M}$改变正負号。由此得出，各向异性能必須是矢量$\mathbf{M}$的方向余弦的偶函数。因此，在微扰論的不为零的第一近似下，我們得到下面的表达式:

$$U_{各向异性}=\frac{\beta_{ik}}{2}M_iM_k, \tag{37.1}$$

式中 β_{ik} 是无量綱的二秩对称張量，其分量为溫度的函数。在居里点附近，(37.1)式也可以視为各向异性能展开为矢量 $\mathbf{M}$ 的冪級数內的第一項，而矢量 $\mathbf{M}$ 在这一溫度区域內为一小量(但是应該着重指出，在其他溫度下，这一观点是不正确的)。由此得出，当 $T\to\to\Theta$ 时，β_{ik} 趋向于不为零的有限值。

在单軸和双軸晶体內，二秩对称張量分別有二个和三个独立分量，但是在現在的情况下，还必須注意到，二次的組合式，即 $M_x^2+M_y^2+M_z^2=M^2$，并不与矢量 $\mathbf{M}$ 的方向有关，因而可以从各向异性能內消去。所以对于单軸和双軸晶体而言，(37.1)式总共包含一个或二个独立系数。

例如，单軸晶体的各向异性能可以写为

$$U_{\text{各向异性}}=\frac{\beta}{2}(M_x^2+M_y^2)=\frac{\beta}{2}M^2\sin^2\theta, \tag{37.2}$$

式中 θ 是 $\mathbf{M}$ 和 z 軸之間的夹角，这里选擇 z 軸为晶体的主对称軸。如果常数 β 是正的，則在 z 軸方向磁化时，各向异性能为极小值；这个軸通常称为易磁化方向。

如果 $\beta<0$，則易磁化方向在 xy 平面內；在这种情况下，自然可以把各向异性能写为

$$U_{\text{各向异性}}=\frac{|\beta|}{2}M_z^2, \tag{37.3}$$

这种形式和(37.2)等效，但其中 $U_{\text{各向异性}}=0$ 仍然对应于易磁化方向[①]。(37.3)式在 xy 平面內是各向同性的。因此，在这种情况下，易磁化方向决定于更高次的項(参閱本节的例題1)。

我們現在来研究单軸铁磁体的磁化强度与铁磁体內的磁場之間的关系。为明确起見，假定 $\beta>0$[②]。我們記住假定了 $\mathbf{M}$ 的絕对

---

①. 六角形晶系的鈷是单軸铁磁体的一个例子，在这种鈷內，当溫度为 $-200°C$ 时 β 变号，而且 $\beta>0$ 和 $\beta<0$，分別在这一点的下面或上面。在室溫下，$\beta=4.2$。

② 当討論单軸晶体时，即是指这种情况。

值与 H 无关，因而只须考虑矢量 M 的旋轉。从对称性明显看出，矢量 M 在通过 z 軸和 H 方向的平面內（由于在各向异性能內未考虑高次項，这些項在 xy 平面內是各向异性的）；我們选擇这一平面为 x, z 平面，于是計及各向异性能的热力学势等于[①]

$$\widetilde{\Phi}=\Phi_0(M)+\frac{\beta}{2}M_x^2-\mathbf{HM}-\frac{H^2}{8\pi}=$$
$$=\Phi_0(M)+\frac{\beta M^2}{2}\sin^2\theta-M(H_x\sin\theta+H_z\cos\theta)-\frac{H^2}{8\pi}. \tag{37.4}$$

M 对 H 的依賴关系由平衡条件 $\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\theta}=0$ 求出，由此得

$$\beta M\sin\theta\cos\theta=H_x\cos\theta-H_z\sin\theta. \tag{37.5}$$

对未知量 $\xi=\sin\theta$ 而言，这是四次的代数方程：

$$(\beta M\xi-H_x)^2(1-\xi^2)=H_z^2\xi^2,$$

当 ξ 为奇次冪时，式中的系数不为零。这个方程或者有二个实根，或者有四个实根（而且都<1）。因为这些根都对应于函数 $\widetilde{\Phi}(\theta)$ 的极值，因此，十分显然，在第一种情况下，这函数有一极小值和一极大值，而在第二种情况下，有两个极小值和两个极大值。換句話說，在第一种情况下，对应于 H 的給定值，有一个磁化方向。而在第二种情况下，对应于 H 的給定值，M 有两个不同的方向，其中一个方向（对应于 $\widetilde{\Phi}$ 的极小值中的最小值）在热力学上是完全稳定的，而第二个方向（对应于 $\widetilde{\Phi}$ 的极小值中的最大值）在热力学上是亚稳定的。

取决于 H_x 和 H_z 值的不同，可发生这种情况或那种情况。当

① 在下面的討論中，对于各向异性能，我們利用(37.2)式。但是应該指出，以(37.2)式为第一項的展开式，在实际情况下，通常收斂性相当坏。因此，为了对现象作出滿意的定量描写，还必須考虑下一項（即四次項，对于六角形晶体，它与 $\sin^4\theta$ 成正比）。

这些参量逐漸变化时，若其中一个极大值恰与其中一个极小值重合，就会从一种情况轉变为另一种情况。这时曲綫 $\tilde{\Phi}(\theta)$ 代替有一极值点而有一拐点，即除了 $\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\theta}$ 为零外，二次导数 $\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\theta^2}$ 也变为零。把(37.5)写成

$$\frac{H_x}{\sin\theta}-\frac{H_z}{\cos\theta}=\beta M,$$

再对 θ 微分一次，我們得到

$$\frac{H_x}{\sin^3\theta}=-\frac{H_z}{\cos^3\theta}.$$

从这两个式子內消去 θ，我們得到

$$H_x^{\frac{2}{3}}+H_z^{\frac{2}{3}}=(\beta M)^{\frac{2}{3}}. \tag{37.6}$$

在 H_x, H_z 图上，方程(37.6)給出如图 20 所示的閉合曲綫。这曲綫把 H_x, H_z 平面分成两部分，其中一部分可能存在亚稳定状态，另一部分則不可能。不必进行补充的研究，可以明显看出，亚稳状态不存在的区域是曲綫外的区域。因为当 $H\to\infty$ 时，**M** 只有沿磁場 **H** 的一个方向是稳定的。

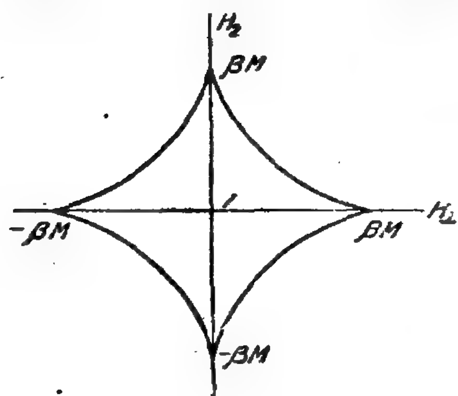


图 20

亚稳状态的存在导至可能存在所謂磁滯現象，这种現象是当外磁場变化时铁磁体的状态发生不可逆变化而产生的。因此，图 20 所示的曲綫表示磁滯的“絕对界綫”，如果磁場值在这曲綫以外，則在任何情况下都不会有磁滯現象发生①。

① 在这一章的叙述中，我們只限于研究铁磁体的热力学平衡态以及其中的可逆过程。特別是我們完全不討論磁滯現象的机构，这种現象和晶体的缺陷、样品的內应力、多晶性以及其他原因有关。

磁場强度 H 垂直于易磁化軸的状态 ($H_x=H, H_z=0$)，需要作特別的研究。这时热力学勢为

$$\tilde{\Phi}=\Phi_0-\frac{H^2}{8\pi}+\frac{\beta M^2}{2}\sin^2\theta-HM\sin\theta. \tag{37.7}$$

如果 $H>\beta M$，則 $\tilde{\Phi}$ 只有一极小值——当 $\theta=\frac{\pi}{2}$，也即是当磁化强度平行于磁場方向。如果 $H<\beta M$，則当

$$M_x=M\sin\theta=\frac{H}{\beta} \tag{37.8}$$

时，$\tilde{\Phi}$ 有一极小値，这相应于矢量 M 的两个可能位置（在角度 θ 和 $\pi-\theta$ 下），它們对 x 軸是对称的。由此可知，在这种情况下，有两个平衡状态，而且 $\tilde{\Phi}$ 的值相同，因而稳定程度也相同。

这一情况是非常重要的，因为可能引起两“相”互相接触而存在。其中場强 H 相同，但磁化强度 M（因而也是磁感应强度 B）不同。結果出現新的可能性，使物体的总热力学勢減小；物体的体积可以分成許多单个的小区域，在每一小区域内，磁化有两个容許方向中的一个方向；这些区域称为自发磁化区域或称为磁疇。实际上，确定铁磁体的热力学平衡机构，需要研究整个的物体，并考虑到它的具体形状和大小。我們将在 § 39 内再回头討論这个問題。

我們現在研究铁磁体的一小段，这小段比物体的总体积小，但大于磁疇的綫度。在这一小段內，磁場强度 H_x 可以假定是不变的，我們用 $\overline{\mathbf{M}}$ 和 $\overline{\mathbf{B}}$ 表示按它的体积而求得的 M 和 B 的平均值。和 H_x 一样，磁化强度的横向分量 $M_x=\frac{H_x}{\beta}$ 也是不变的。在不同的磁疇內，纵向分量 M_z 相差一个正負号，因而，在任何情况下，其平均值都不会超过 $|M_z|$。同时还考虑到处处 $H_z=0$，于是得到平均磁感应为

$$\bar{B}_x=H_x\left(1+\frac{4\pi}{\beta}\right),\ \bar{B}_z<4\pi\sqrt{M^2-\frac{H_x^2}{\beta^2}}. \tag{37.9}$$

由这些式子，可以求出相应于单軸铁磁体磁疇結构的平均磁感应值的区域。

現在我們轉到研究立方系的铁磁晶体。它們的性质和单軸(以及双軸)晶体有重大差别。問題在于，由矢量 **M** 的分量构成的唯一的二次組合式是 $M_x^2+M_y^2+M_z^2$ 之和，它对立方对称变换是不变式，并且与 **M** 的方向无关。因此，在立方晶体內，各向异性能展开式內不为零的第一项不是二次項而是四次項。由于这一原因，立方晶体內的磁各向异性效应，一般說来，要比单軸晶体或双軸晶体弱得多。

立方对称有两个由矢量 **M** 的分量所构成的四次不变量：

$$(M_x^2M_y^2+M_x^2M_z^2+M_y^2M_z^2)\text{ 和 }\frac{1}{2}(M_x^4+M_y^4+M_z^4).$$

但是这些不变量在現在的情况下不是独立的，因为它們相加之和是与方向无关的量：$\frac{1}{2}(M_x^2+M_y^2+M_z^2)^2$。所以，立方铁磁体的各向异性能只包含一个常数(在所考虑的近似下①)，并且可以写为

$$U_{\text{各向异性}}=\beta(M_x^2M_y^2+M_x^2M_z^2+M_y^2M_z^2) \qquad (37.10)$$

或者写成等价形式：

$$U_{\text{各向异性}}=-\frac{\beta}{2}(M_x^4+M_y^4+M_z^4). \qquad (37.11)$$

当 $\beta>0$②时，对矢量 **M** 的三个位置——平行于立方体的三个棱(x, y, z 軸；晶向[100]、[010]、[001])，磁各向异性能在数值上有相同的极小值。由此可見，在这种情况下，晶体有三个等价的易磁化軸。

---

① 以下的近似相应于六次項。在計算六次的独立不变量的数目时，不但应該消去与方向无关的量 M^6，而且也应該消去与四次不变式只差一个因子 M^2 的表达式。結果只剩下了一个不变量，可以选擇为 $M_x^2M_y^2M_z^2$。

② 例如在铁內就存在这种情况。

如果$\beta<0$[①]，则当$M_x^2=M_y^2=M_z^2=\frac{1}{3}M^2$，也即是当矢量M平行于立方体的四个空間对角綫的任一个时(晶向[111]、[$\bar{1}$11]等等)，磁各向异性能取极小值。在这种情况下，它們也就是易磁化方向。

应該注意到，立方铁磁晶体，在它的任何一个易磁化方向自发磁化后，严格說来，将失去它的立方对称性(由此原子发生相应的移动，即晶体点陣发生畸变)。在立方体的棱方向磁化的晶体，成为弱正方形的，而在立方体空間对角綫方向磁化的晶体，則成为菱面体。在这方面，立方系晶体和单軸晶体不同的地方，是它的易磁化方向平行于主对称軸；十分显然，在这个方向的磁化，不会改变晶体的对称性。

研究立方晶体的M对H的依賴关系，在原則上和上面研究单軸晶体的方法相似。但是，由于数学方程更为复杂，因此要得到显式的分析式是不可能的，我們将不深入討論这一問題。

例　題

1. 試写出单軸晶体的$U_{各向异性}$展开式內导至xy平面內的各向异性的二次以下的項。

解. 这个問題归結为求出由矢量M的分量所組成的最低次(偶次)冪的独立組合式，这些組合式对晶体的对称变换是不变量，并且所包含的M_x和M_y不是$M_x^2+M_y^2$之和的形式。在正方对称系內，有一个这样的組合式，可以选擇为

$$M_x^2M_y^2$$

[組合式$\frac{1}{2}(M_x^4+M_y^4)$和上面所指出的組合式一起，給出$\frac{1}{2}(M_x^2+M_y^2)^2$之和，因此不是独立的]。

在六角对称情况下，xy平面內的各向异性只出現在六次項內，我們选擇

① 例如在鎳內。

六次的独立不变組合式为

$$\frac{1}{6i}[(M_x+iM_y)^6-(M_x-iM_y)^6]=$$

$$=2M_xM_y\left(M_x^4-\frac{10}{3}M_x^2M_y^2+M_y^4\right).$$

菱面体对称性容許有一个这样的六次項和一个四次的独立組合式，例如

$$\frac{M_z}{2}[(M_x+iM_y)^3+(M_x-iM_y)^3]=M_xM_z(M_x^2-3M_y^2).$$

但是，求出 xy 平面內的易磁化方向（由于 M_z 很小），需要同时計及四次項和六次項。

2. 假設单軸铁磁晶体为迴轉橢球形状（其易磁化軸与迴轉軸相合），放在外磁場 $\mathfrak{H}$ 內，試求晶体具有磁疇結构时的 $\mathfrak{H}$ 值区域。

解．根据均勻外磁場內橢球的一般性质（§8），对磁疇結构平均而得到的磁感应平均值 $\overline{\mathbf{B}}$ 和磁場强度 $\overline{\mathbf{H}}=\mathbf{H}$ 与 $\mathfrak{H}$ 的关系为

$$n\overline{B}_z+(1-n)H_z=\mathfrak{H}_z,$$

$$\frac{1-n}{2}\overline{B}_x+\frac{1+n}{2}H_x=\mathfrak{H}_x,$$

式中 n 为橢球主軸方向（z 軸）的退磁化系数。令 $H_z=0$，并利用(37.9)式，我們得到

$$H_x=\frac{\mathfrak{H}_x}{1+2\pi(1-n)/\beta},\qquad \overline{B}_z=\frac{\mathfrak{H}_z}{n}<4\pi\sqrt{M^2-\frac{H_x^2}{\beta^2}}.$$

由此消去 H_x，求得所求的不等式为

$$\frac{\mathfrak{H}_z^2}{(4\pi n)^2}+\frac{\mathfrak{H}_x^2}{[\beta+2\pi(1-n)]^2}<M^2,$$

这个式子确定了磁疇結构存在的区域。

3. 試为强磁場內 ($H\gg 4\pi M$) 的多晶体求出对各晶粒求平均而得到的平均磁化强度，晶粒具有单軸对称性。

解．設在一晶粒內，θ 和 ψ 为易磁化方向分别与矢量 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{H}$ 所成的夹角。可以預先看出，在强磁場內，$\mathbf{M}$ 的方向将接近于 $\mathbf{H}$ 的方向，也即是角 $\vartheta=\theta-\psi$ 很小。在(37.4)式內写出 $\mathbf{MH}=MH\cos(\theta-\psi)$，并令导数 $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$ 等于零，于是我們得到

$$\vartheta\cong\sin\vartheta=-\frac{\beta M}{H}\sin\theta\cos\theta.$$

十分显然，平均磁化强度平行于 **H** 方向，并且等于

$$\overline{M}=M\overline{\cos\vartheta}=M\left[1-\frac{1}{2}\overline{\vartheta^2}\right]=M\left[1-\frac{\beta^2M^2}{2H^2}\overline{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right],$$

式中的短横綫表示对各晶粒求平均值。假定各晶粒的易磁化軸方向都是同等几率的，我們得到

$$\overline{M}=M\left(1-\frac{\beta^2M^2}{15H^2}\right).$$

由此可見，平均磁化强度按定律 $\overline{M}-M\sim\frac{1}{H^2}$ 趋近于飽和。

4. 所求与上题相同，但晶粒具有立方对称性。

解. 当附加条件为 $M_x^2+M_y^2+M_z^2=$ 常数时，表达式

$$-\frac{\beta}{2}(M_x^4+M_y^4+M_z^4)-(H_xM_x+H_yM_y+H_zM_z)$$

取极小值的条件为

$$2\beta M_x^3+H_x=\lambda M_x,$$
$$2\beta M_y^3+H_y=\lambda M_y,$$
$$2\beta M_z^3+H_z=\lambda M_z,$$

式中 λ 是拉格朗日未定因子。当 H 很大时，由此得

$$M_x\cong\frac{1}{\lambda}H_x+\frac{2\beta}{\lambda^4}H_x^3+\cdots,$$

将这三个等式的平方相加，我們得到 $M^2\cong\frac{H^2}{\lambda^2}$，也即是 $\lambda\cong\frac{H}{M}$，于是求得 **M** 和 **H** 間的夹角为

$$\vartheta^2\cong\sin^2\vartheta=\frac{[\mathbf{MH}]^2}{M^2H^2}=\frac{4\beta^2M^6}{H^{10}}\Sigma H_x^2H_y^2(H_x^2-H_y^2)^2,$$

式中求和时循环交换下角标 $x,\ y,\ z$。将这表达式对各晶粒的各种取向求平均値，等价于对矢量 **H** 的各方向求平均値。对确定 **H** 方向的球面角进行积分，就得到后一平均値为①

① 对于立方晶体也存在一个場区域，其中 MH 大于各向异性能，但小于 $4\pi M^2$。所得到的公式在这里不能应用，因为在推导它时沒有考虑到在不同晶粒內由于磁化方向不同而出现的場。在这种情况下，更精确的研究也导至定律 $\frac{1}{H^2}$，但系数不同。我們不去詳細研究这个問題，因为得到的結果，由于目前尚不明白的原因，和实驗数据是分歧的。

$$\overline{M}=M\left(1-\frac{\overline{\vartheta^2}}{2}\right)=M\left(1-\frac{8\beta^2M^6}{105H^2}\right).$$

§38. 铁磁体的磁致伸縮

磁場內铁磁体磁化强度的改变，引起铁磁体发生形变，这种現象称为磁致伸縮現象。这种現象的产生旣和物体內的交換相互作用有关，也和相对論的相互作用有关。因为交換能只与磁化强度的絕对值有关，因而它的变化也只依賴于磁場內M量的变化。虽然，一般說来，后者非常之小，但是，另一方面，交換能本身却比各向异性能大得多。因此，两种相互作用所引起的磁致伸縮效应，在数量級上是可以相互比較的。

这种情况存在于单軸晶体內。由于 **M** 方向的改变所产生的显著形变，发生在 $H\sim\beta M$ 的場內；在 $H\sim4\pi M$ 的場內，量M的改变成为主要的。这两个区域实际上是相合的，因此，研究单軸铁磁体的磁致伸縮現象时，一般說来，必須同时考虑到两种效应。在这里我們不准备詳細去求这些相当复杂的公式。

在立方晶体內，由于各向异性能較小（四次量），情况截然不同。由于 **M** 方向的改变所引起的显著磁致伸縮，甚至也发生于比較弱的場內，其中M的絕对值的变化，可以完全忽略不計。我們現在来研究这些效应。

描写形变物体內相对論相互作用能的变化，是在热力学势 $\tilde{\Phi}$ 內添入附加的"磁彈性"項，这些項依賴于彈性应力張量 σ_{ik} 的分量和矢量 **M** 的方向［阿庫洛(Н. С. Акулов)，1928］。其不为零的头几項对σ_{ik}是綫性的，对矢量 **M** 的方向余弦則是二次的（因为后者对时間变号是对称的）。因此，在一般情况下，对于磁彈性能，我們得到表达式为

$$U_{磁弹}=-\lambda_{iklm}\sigma_{ik}M_lM_m, \tag{38.1}$$

式中 λ_{iklm} 是四秩張量，对两对下角标 i,k 和 l,m 是对称的（但对 i,k 与 l,m 的换位不对称）。在居里点附近，展开为矢量 $\mathbf{M}$ 的方向余弦的冪級数与展开为其分量的冪級数等效，因而量 λ_{iklm} 趋近于一常数。

在計算張量 λ_{iklm} 的独立分量的数目时，必須注意到，(38.1)內的項包含 $\mathbf{M}$ 分量的組合式：$M_x^2+M_y^2+M_z^2$，这些項与 $\mathbf{M}$ 的方向无关，因而可以从磁彈性能內消去①。注意到这一点，我們得到，在立方晶体內，磁彈性能包含二个独立的系数；方便的是把它写成下面的形式：

$$U_{磁弹}=-\lambda_1(\sigma_{xx}M_x^2+\sigma_{yy}M_y^2+\sigma_{zz}M_z^2)-$$
$$-2\lambda_2(\sigma_{xy}M_xM_y+\sigma_{xz}M_xM_z+\sigma_{yz}M_yM_z). \qquad (38.2)$$

把 $\tilde{\Phi}$ 对 σ_{ik} 的相应分量求微分，就得到形变張量：

$$u_{ik}=-\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\sigma_{ik}},$$

而且 $\tilde{\Phi}$ 內还必須包含通常的彈性能（正負号相反，参閱 107 頁的底注）。在立方晶体內，后者包含三个独立的彈性系数，其形式为

$$U_{磁弹}=\frac{k_1}{2}(\sigma_{xx}^2+\sigma_{yy}^2+\sigma_{zz}^2)+$$
$$+k_2(\sigma_{xx}\sigma_{yy}+\sigma_{xx}\sigma_{zz}+\sigma_{yy}\sigma_{zz})+$$
$$+k_3(\sigma_{xy}^2+\sigma_{xz}^2+\sigma_{yz}^2). \qquad (38.3)$$

我們得到形变張量为②

$$\left.\begin{aligned}u_{xx}&=k_1\sigma_{xx}+k_2(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})+\lambda_1M_x^2,\\ u_{xy}&=k_3\sigma_{xy}+\lambda_2M_xM_y.\end{aligned}\right\} \qquad (38.4)$$

（对其余分量，有类似的式子）。

---

① 由此而引起的对选擇 λ_{iklm} 的某种任意性，只不过表明选擇 $\mathbf{M}$ 的方向是有条件的，这时（沒有外加的机械力）我們假定晶体是未形变的。

② 在把 Φ 微分时，必須注意到 110 頁上的底注。

这些公式包含了全部的磁致伸縮效应（在所研究的場区域內）。特別是沒有內应力时，由公式

$$u_{xx}=\lambda_1 M_x^2,\quad u_{xy}=\lambda_2 M_x M_y,\cdots$$

可求出磁化方向改变时的形变变化。我們应該記住，由于假定形变不存在的 **M** 的方向是有条件地选擇的，因此形变的絕对値在一定的意义上也是有条件的。

既然在立方晶体內各向异性能很小，因此就发生了一个問題，除了各向异性能外，是否还需要同时也考虑到磁致伸縮（例如当求磁化强度对場的依賴关系时），而这常常会使問題极其复杂化。但实际上幷不如此，因为各向异性能总是大于磁化强度改变时所引起的磁彈性形变能。各向异性能是自旋-自旋相互作用的微扰理論的二次效应，其数量級为这些相互作用能的平方除以交換能（全部量都屬于单位体积）。但磁彈性能虽然也是这种平方的数量級，但其除数較大（除以晶体的彈性模量）。

現在来研究如此强的磁場內（$H\gg 4\pi M$）磁体的磁致伸縮效应，这时各向异性能不重要，而磁疇結构也不存在，于是 **M** 的方向可以假定与 **H** 的方向相合。

由于略去了各向异性能，因而晶体的具体对称性也就成为不重要，于是下面得到的公式，可以同样地应用于任何铁磁体上。

假設铁磁体在均匀的外磁場 $\mathfrak{H}$ 內，它的总热力学势 $\widetilde{\mathscr{P}}$①由下式得出：

$$\widetilde{\mathscr{P}}=-\mathscr{M}\mathfrak{H}=-MV\mathfrak{H},\tag{38.5}$$

式中 $\mathscr{M}=MV$，为在磁場方向受到均匀磁化的物体的总磁矩；在这里我們略去了与磁場无关系的 $\mathscr{P}_0$ 項。形变張量对物体的体积求平均由下式得出：

① 这里 $\mathscr{P}$ 的定义是根据 § 12 內的定义。只当物体的形变存在很大的不均匀性时，这个式子才不能应用。

$$\bar{u}_{ik} = -\frac{1}{V}\frac{\partial\widetilde{\mathscr{P}}}{\partial\sigma_{ik}},$$

由此得

$$\bar{u}_{ik} = \frac{\mathfrak{H}}{V}\frac{\partial(VM)}{\partial\sigma_{ik}}. \tag{38.6}$$

由此可見，形变决定于磁化强度对内应力的依赖关系。

当晶体为立方对称时，表征晶体性质的任何二秩对称張量，都变成一标量乘上 δ_{ik}。这种情况也适用于張量$\frac{\partial(VM)}{\partial\sigma_{ik}}$，于是在这种情况下，磁致伸縮形变变成为各向压縮或伸长。

如果我們感兴趣的只是物体总体积的变化 δV，則只要将$\widetilde{\mathscr{P}}$对压强微分，就得到 δV 为

$$\delta V = \frac{\partial\widetilde{\mathscr{P}}}{\partial p} = -\mathfrak{H}\frac{\partial(MV)}{\partial p}, \tag{38.7}$$

式中 p 必須理解为加在物体上的均匀压强。

例　　題

試求在外磁場 $\mathfrak{H}\sim 4\pi M$ 內的铁磁体椭球发生磁致伸縮时的体积变化，磁場方向与椭球的一个軸平行，铁磁体假定是立方的①。

解. 略去各向异性能不計，磁疇結构存在的区域由不等式 $\bar{B}<4\pi M$ 求出，这时 $H=0$(短綫表示对物体体积求平均值，参照 § 37)。在椭球內，$n\bar{B}+(1-n)\bar{H}=\mathfrak{H}$，并令 $H=0$，于是得到磁疇結构存在的区域为

$$\mathfrak{H}<4\pi_n M$$

这时 $n\bar{B}=4\pi n\bar{M}=\mathfrak{H}$，也即是平均磁化强度为

$$\bar{M} = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi n}.$$

由此得到热力学势为

---

① 在单軸铁磁体內，当 $H\sim 4\pi M$ 时，还必須考虑到各向异性能，但在立方晶体內則不須如此。

$$\widetilde{\mathscr{P}} = -V\int_0^{\mathfrak{H}} \overline{M}\, d\mathfrak{H} = -\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi n}V. \tag{1}$$

如果 $\mathfrak{H} > 4\pi nM$，则椭球完全沿磁場方向磁化：$\overline{M} = M$。这时

$$\widetilde{\mathscr{P}} = -M\mathfrak{H}V + 2\pi M^2 Vn \tag{2}$$

（当 $\mathfrak{H} = 4\pi Mn$ 时，(1)式和(2)式相合）。

将 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 对压强进行微分，于是得到所求的体积改变为

$$\delta V = -\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi n}\frac{\partial V}{\partial p}, \text{如果 } \mathfrak{H} < 4\pi nM,$$

$$\delta V = -H\frac{\partial(MV)}{\partial p} + 2\pi n\frac{\partial(M^2V)}{\partial p}, \text{如果 } \mathfrak{H} > 4\pi nM.$$

当 $\mathfrak{H} \gg 4\pi nM$ 时，我們又得到正文內的(38.7)式。

§39. 铁磁体的磁疇結构

在§37中曾經指出，存在一个寬广的状态区域，其中铁磁体具有所謂磁疇結构，也即是可以分解成为許多具有不同磁化方向的小区域①。不在外磁場內的铁磁体，尤其是如此。

直接根据磁場的边界条件，可以对磁疇間分界面的形状作出若干推論。因为相邻磁疇的磁場强度 $\mathbf{H}$ 相同，因而磁感应强度的法向分量 B_n 为連續的条件，就归結为 M_n 为連續的条件。在单軸晶体內，当 M_x, M_y 相同时，不同磁疇的磁化强度只是相差 M_z 的正負号。在这些条件下，M_n 的連續性表明，分界面必須与 z 軸平行，即与易磁化軸平行。

我們首先来研究与磁疇的具体形状无关的分界面的性質。这些分界面实际上是一些很狹的过渡层，其中磁化方向从一个磁疇內的方向改变到另一个磁疇內的方向是連續地改变的。这种层的"寬度"和其中 $\mathbf{M}$ 变化的过程，由热力学平衡条件决定。这时必須

① 磁疇的概念是由維依斯(1907)最先提出的。Л. Д. 朗道和 E. M. 栗弗席茲給出了磁疇的热力学理論。

考虑到由于磁化不均匀而引起的附加能量。这种"不均匀能"的最大貢献，来自交換相互作用。从宏观观点看来，这能量可以表示为 M 对坐标的导数。如果假定 M 方向的陡度相当小，則可以在普遍形式下作到这一点；这条件表明，磁矩方向的重大变化只发生在大于原子間距的距离上。在現在的情况下，这一条件显然满足，因为相邻原子磁矩方向的重大差别，会使交換能量大大增加，因而这在热力学上是不利的。

我們用 $U_{不均匀}$ 表示"不均匀性能"的密度。在 $U_{不均匀}$ 展开为 M 分量的不同次导数的冪級数內，其最大項是一次导数的二次項（由于对时間变号是对称的，因而不可能是綫性項）。其次，由于 $U_{不均匀}$ 是由交換作用所产生的，因而在晶体的一定点处，它与 M 的絕对方向无关。滿足这些条件的普遍式子为

$$U_{不均匀}=\frac{1}{2}\alpha_{ik}\frac{\partial M_l}{\partial x_i}\frac{\partial M_l}{\partial x_k}, \tag{39.1}$$

式中 α_{ik} 是对称張量。此外，这二次（对导数而言）式应取实在正值。在单軸晶体內，張量 α_{ik} 有二个独立分量，于是不均匀性能的形式为

$$U_{不均匀}=\frac{1}{2}\alpha_1\left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\alpha_2\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z}\right)^2, \tag{39.2}$$

而 α_1 和 α_2 是正值。在立方晶体內，有 $\alpha_1=\alpha_2$。

对于(39.1)式，必須作如下的說明。具有实际热力学意义的并不是 $U_{不均匀}$ 本身，而是 $U_{不均匀}$ 对物体体积的积分。由于这一原因，我們无須写出 $U_{不均匀}$ 內含有 M 的分量和它对坐标的二次导数的乘积的各項，虽然在形式上这些項的数量級也和(39.1)式內的各項相同。問題在于，对体积进行积分时，它們变換为一次导数的乘积，也即是已由(39.1)[①]式考虑在內。

---

① 由于晶体的对称性，可以容許存在包含一次冪导数 $\frac{\partial M_l}{\partial x_i}$ 和 M_l 分量相乘的項。但是，在对物体的体积积分时，这些項变成只依賴于物体表面性质的式子。

举一个例子，我們来研究单軸晶体的磁疇壁，这时我們假定矢量 M 完全与易磁化軸（z 軸）平行（或反平行）。沒有外加磁場时的磁疇特别是这样的。

过渡层的結构由总自由能为极小値的条件决定[①]。这时，交換能傾向于使层的厚度增加（即使 M 方向的改变更为平坦）；而各向异性能則有相反的作用，因为 M 与易磁化方向的任何偏离，都会使各向异性能增加。

选擇 x 軸的方向垂直于层平面；M 的分布只与这一坐标有关。矢量 M 沿层厚度的轉动发生在 yz 平面內，也即是处处 $M_x=0$。这可从下面的簡单考虑明显看出。不均匀性能和各向异性能，一般与磁化强度在哪一平面內发生轉动无关。不为零的分量 M_x 的存在，必然引起产生磁場，因为由此而引起附加的磁能，因此在热力学上显然是不利的。实际上，在磁疇体积內，$M_x=0$，如果在过渡层內 $M_x\neq 0$，則 $\operatorname{div}\mathbf{M}=\frac{\partial M_x}{\partial x}$ 也不为零。既然 $\operatorname{div}\mathbf{B}=\operatorname{div}\mathbf{H}+4\pi\operatorname{div}\mathbf{M}=0$，因此，除了 $\operatorname{div}\mathbf{M}\neq 0$ 外，也应該 $\operatorname{div}\mathbf{H}\neq 0$，即 $\mathbf{H}\neq 0$。

設 θ 为 M 与 z 軸間的夹角。于是 M 的分量为

$$M_x=0,\quad M_y=M\sin\theta,\quad M_z=M\cos\theta.$$

不均匀性能和各向异性能之和由下列积分給出：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\alpha_1}{2}(M_y'^2+M_z'^2)+\frac{\beta M_y^2}{2}\right]dx=$$

$$=\frac{M^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha_1\theta'^2+\beta\sin^2\theta)\,dx \tag{39.3}$$

（撇表示对 x 取微分），自由能內的其余各項与层的結构无关，因此

① 这里更正确地应称为总自由能，而不是总热力学势，是因为注意到在层內可能有很不均匀的形变。

在这里可以略去。为了求出使这积分为极小值的函数 $\theta(x)$，我們写出相应的欧拉方程:

$$\alpha_1\theta''-\beta\sin\theta\cos\theta=0,$$

第一次积分后得

$$\theta'^2-\frac{\beta}{\alpha_1}\sin^2\theta=\text{常数}。$$

假設过渡层的厚度比磁疇本身的厚度小，于是我們可以写出这个方程的边界条件为

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } x=-\infty \text{ 时，} \theta=0,\\ \text{当 } x=+\infty \text{ 时，} \theta=\pi,\\ \text{当 } x=\pm\infty,\ \text{即 } \theta=0, \pi \text{ 时，} \theta'=0.\end{array}\right\} \quad (39.4)$$

这些边界条件表明，相邻磁疇在相反方向磁化。于是式中的常数＝＝0，把下列方程积分:

$$\theta'^2=\frac{\beta}{\alpha_1}\sin^2\theta,$$

我們得到

$$\cos\theta=-\operatorname{th}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha_1}}x, \quad (39.5)$$

由这个式子可以求出过渡层內磁化强度方向改变的过程，这层的“厚度”为 $\delta\sim\sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta}}$。

把(39.5)式再代入(39.3)，我們得到

$$M^2\beta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}^2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha_1}}x},$$

或者进行积分后，得

$$2M^2\sqrt{\alpha_1\beta}. \quad (39.6)$$

如果把磁疇壁視为几何平面，則(39.6)式为“表面張力”，为了計及形成这种磁疇壁所需的能量，必須添上这一项。

在热力学平衡下的磁疇形状和大小，由总热力学势为极小值的条件求出。它們主要依賴于物体的具体形状和大小。在铁磁体为平行平面板的最簡单情况下，原則上磁疇形状可以为平行层，或为从物体一面穿过另一面的"纖維状"結构。为明确起見，下面我們将称之为"层"①。

磁疇間任何新疇壁的形成，都会使"表面張力"的总能量增加。因此，这一因素使磁疇数目减少，也即是使磁疇的厚度增加。

設物体內有磁疇，則在該物体外表面附近所产生的多余能量，有着相反的作用。在物体內，磁場 $\mathbf{H}=0$，由于矢量 $\mathbf{M}$ 在易磁化方向，因而各向异性能也等于零。但在表面附近，則情況不相同。

在各向异性能內的系数 β 为很大的极限情况下，层应該伸展到物体表面，而 $\mathbf{M}$ 的方向保持不变(图 21, a, 为明确起見，图中假定物体表面与易磁化方向垂直)。但这时在表面附近产生磁場，这种磁場透入周圍空間和透入物体內部的距离为层的厚度 a 的数量級。

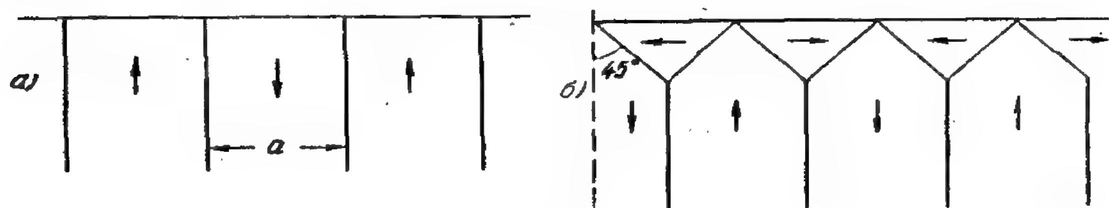


图 21

在 β 值很小的相反情况下，更为有利的磁化强度的分布是 $\mathbf{M}$ 与易磁化方向发生偏离而不产生磁場的分布。当 $\mathbf{H}=0$ 时，必須处处 $\operatorname{div}\mathbf{B}=4\pi\operatorname{div}\mathbf{M}=0$，而在全部的磁疇壁上和物体的自由面上，$M_n$ 必須为連續的。这一点可由形成三角形截面的"閉合磁疇"来达到(图21, б)，在这种磁疇內，磁化方向与物体表面平行。这些区

① 层状的磁疇結构看来是最普遍的。

域的总体积以及其中的各向异性能，都与层的厚度 a 成正比。

由此可見，在任何情况下，磁疇伸展到物体表面时总引起多余的能量——磁疇厚度越大，这多余的能量也越大。因此这种效应会使磁疇的厚度减小。

形成的磁疇的厚度，取决于这两种相反趋势的平衡作用。例如，我們假定磁疇(在薄板內)的形状为厚度不变的平行平面层。磁疇的数目与 $\frac{1}{a}$ 成正比，而在磁疇間分界面上的表面張力能量，与总面积成正比，即 $\sim\frac{L}{a}$，其中 L 是物体在磁疇方向的长度(即板的厚度)。磁疇伸展到板表面的"脫出能"与 a 成正比。这两种能之和作为 a 的函数，在 a 取与 $\sqrt{L}$ 成正比的某一值时为极小值。

由此可見，磁疇厚度随物体綫度的增加而增加。但是表示这种增加的定量定律 $a\sim L^{\frac{1}{2}}$，由于假定了磁疇厚度不变，显然并不是对任何的 L 值都正确。問題在于，当磁疇伸展到物体表面时，它的厚度不可能超过某一极限值 a_k，这 a_k 值依賴于铁磁体本身的性质，但和整个物体的形状和大小无关。a_k 的数值决定于当 a 增加时在深度为 $\sim a$ 的物体表面附近，磁疇的"分裂"成为热力学上有利。因为一磁疇的"脫出能"随 a^2 而增加，而磁疇分裂时所产生的多余表面張力能則随 a 而增加，因而这种时刻必然会到来。

于是我們得到結論，随着物体綫度以及磁疇厚度的增加，当磁疇伸展到物体表面时，磁疇应发生向前发展的"分支"(E. 栗弗席兹，1948)。但我們在这里不准备詳細研究存在的各种可能性，因为到目前为止，还有許多情况尚未明了①。

---

① 参閱 С. В. Вонсовский 和 Я. С. Шур 的"Ферромагнетизм"(铁磁性) 苏联技术出版社 (1948)。K. Kittel: Review of Modern Physics, 21 541, (1949)。Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ, 15, 97(1945)。

随着物体綫度的减小，任何磁疇的形成最后都变成热力学上不利的，于是相当細小的铁磁体粒子代表均匀磁化的"单疇"結构。将均匀磁化的粒子的磁能与由于粒子体积內磁化分布的极不均匀性所形成的"不均匀性能"加以比較，就可以得到对它們的大小L的判据。第一种能量的数量级为M^2V，而第二种能量的数量级为$\sim\frac{\alpha M^2V}{L^2}$。因此，"单疇"的条件为

$$L^2 \ll \alpha. \tag{39.7}$$

在公式

$$\widetilde{\mathscr{F}}=\int\left[\widetilde{\Phi}+\frac{\mathbf{HB}}{8\pi}-\frac{1}{2}\mathfrak{H}\mathbf{M}\right]dV$$

內，令$\mathfrak{H}=0$[与(31.7)式比較]，并用(36.1)式和各向异性能$U_{各向异性}$之和来代替$\widetilde{\Phi}$：

$$\widetilde{\mathscr{F}}=VU_{各向异性}-\frac{\mathbf{M}}{2}\int\mathbf{H}dV \tag{39.8}$$

(我們略去了不重要的常数$\widetilde{\mathscr{F}}_0$)，我們就得到沒有外加磁場时的均匀磁化粒子的热力学势。由于$\mathbf{M}$与$\mathbf{H}$的关系为綫性的，第二項为$\mathbf{M}$分量的二次式：

$$\widetilde{\mathscr{F}}=VU_{各向异性}+\frac{V}{2}a_{ik}M_iM_k, \tag{39.9}$$

式中对称張量a_{ik}只与粒子的形状有关。例如，当粒子为楕球形状时，$\mathbf{H}$在整个楕球体积內为定值，而与$\mathbf{M}$的关系(当$\mathfrak{H}=0$时)为

$$H_i+n_{ik}(B_k-H_k)=H_i+4\pi n_{ik}M_k=0$$

[与(8.10)式比較]。因此，在这种情况下，a_{ik}可用退磁系数張量的分量来表示为

$$a_{ik}=4\pi n_{ik}.$$

在外磁場$\mathfrak{H}$內，粒子的磁化方向由$\widetilde{\mathscr{F}}$为极小值的条件得出，这时在$\widetilde{\mathscr{F}}$內还必須增添一項$-V\mathfrak{H}\mathbf{M}$。对于立方晶体，可以簡单地

写为

$$\mathscr{F}=V\frac{a_{ik}M_iM_k}{2}-V\mathfrak{H}\mathbf{M}, \tag{39.10}$$

其中沒有考慮各向异性能。在单軸(和双軸)铁磁体內，各向异性能的数量級和其余各項相同。把它写为(37.1)的形式后，我們有

$$\mathscr{F}=\frac{V}{2}(a_{ik}+\beta_{ik})M_iM_k-V\mathfrak{H}\mathbf{M}. \tag{39.11}$$

这样提出的問題在数学上与 § 37 內所討論的局部磁化 **M** 依賴于局部磁場 **H** 的問題相同，所不同的只是用 $\mathfrak{H}$ 代替了 **H**，用 a_{ik} 或 $a_{ik}+\beta_{ik}$ 代替了 β_{ik} 而已。

例　題

1. 試求立方晶体內磁疇壁上的"表面張力系数"，假設壁与平面(100)(yz 平面)組成的夹角为 χ，而磁疇沿易磁化軸方向[001](z 軸)磁化。

解. 除了晶軸 x, y, z 外，我們再引进坐标系 x', y', z'，并且 z 軸和 z' 軸重合，$y'z'$ 平面与 yz 平面組成的夹角为 χ。由于必須避免引起强磁場的出現(如单軸晶体的情况一样)，因而必須使矢量 **M** 保持在 $y'z'$ 平面的过渡层內。$x'y'$ 平面內存在的磁各向异性，使 **M** 与 $y'z'$ 平面略为分开。但是由于立方晶体內磁各向异性能很小，因而分量 $M_{x'}$ 为一小量，在相当的精确度內，可以忽略不計。于是

$$M_{x'}=0,\quad M_{y'}=M\sin\theta,\quad M_{z'}=M\cos\theta$$

(θ 是 **M** 与 z 軸間的夹角)，或者在 x, y, z 坐标系內，

$$M_x=M\sin\theta\ \sin\chi,\ M_y=M\sin\theta\ \cos\chi,\ M_z=M\cos\theta.$$

我們求得过渡层內的不均匀性能和各向异性能之和为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\alpha M^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dx'}\right)^2+\beta M^4\left(\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin^4\theta\sin^2 2\chi\right)\right\}dx'. \tag{1}$$

利用与(39.4)相同的边界条件，求这积分的极小值，我們得到

$$\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2\beta M^2}{\alpha}}x'=-\frac{2}{\sin 2\chi}\operatorname{ctg}\theta. \tag{2}$$

把上式再代入(1)內，进行积分后，我們求得所求的表面張力为

$$M^3\sqrt{2\alpha\beta}\left\{1+\frac{\sin^2 2\chi}{2\sqrt{4-\sin^2 2\chi}}\operatorname{Arch}\frac{2}{|\sin 2\chi|}\right\}. \tag{3}$$

(3)式当 χ 角取任何值时都适用。但是描写过渡层結构的方程 (2), 在 $\chi\cong 0$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 时不能应用。在这种情况下，只有考虑到过渡层内的磁致伸縮，才能求得过渡层的有限寬度。

2. 設与铁磁体表面垂直的平行平面磁疇伸展到铁磁体表面而不改变其磁化方向(图 21, a)，試求铁磁体表面附近的磁場能。

解. 求这种表面附近的磁場問題，等效于静电学中求面电荷密度为 $\sigma=\pm M$ 并交替带正电和負电的条带所組成的平面产生的电場問題。

假設物体的表面与平面 $z=0$ 相合，并选擇 x 軸方向与磁疇平面垂直。于是"面电荷密度"$\sigma(x)$是周期为 $2a$(a 为磁疇厚度)的周期函数，而在一个周期上，σ 等于

$$\sigma=-M,\quad 若\ -a<x<0,$$
$$\sigma=+M,\quad 若\ 0<x<a.$$

把它展开为傅立叶級数:

$$\sigma(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a},\quad c_n=\frac{4M}{\pi(2n+1)}.$$

場势滿足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0;$$

于是求得場势为級数形式:

$$\varphi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}e^{\mp(2n+1)\pi z/a}$$

(指数内的"∓"号分別相当于半空間 $z>0$ 和 $z<0$)。系数 b_n 由边界条件决定:

$$-\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=+0}+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-0}=4\pi\sigma,$$

由此得

$$b_n=\frac{2a}{2n+1}c_n.$$

因此，所求的場能是对"带电表面"的积分 $\frac{1}{2}\int\sigma\varphi df$。把能量化到单位面

积，我們有

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}(\sigma\varphi)\Big|_{z=0}dx=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}c_nb_n=\frac{8aM^2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}.$$

式中的总和等于 1.052，于是得到 $0.852M^2a$.

§ 40. 反铁磁体的居里点

和在铁磁体中一样，物体从反铁磁状态轉变为順磁状态，通常是通过第二种相变。因为反铁磁状态和順磁状态都不存在自发磁化，因此，通过反铁磁的居里点时，物质的宏观磁性质的改变只是改变其磁化率。按照第二种相变的普遍性质，張量 μ_{ik} 的分量在相变点处是連續的，而它們对溫度的一次导数則发生突变。

对反铁磁轉变进行定量研究，必須利用第二种相变的普遍理論。在相变点附近，展开热力学势的参量，为元晶胞各結点处的平均磁矩 $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\cdots$ 的某种（取决于晶体点陣的具体磁对称性）綫性組合。当趋近相变点时，和通常一样，这些参量与 $\sqrt{\Theta-T}$ 成比例而趋近于零。

反铁磁体的热力学势，可以包含来源不同的項，旣包含磁矩的交換相互作用的項，也包括磁矩的“相对論”相互作用的項（参照 § 36 的起始）。前者所包含的磁矩 $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\cdots$ 的組合式，只依賴于它們的相对取向，而与它們对晶体点陣的总取向无关。但后者則依賴于晶体的磁矩方向，也即是引起晶体的磁各向异性。

和在铁磁体中一样，强交換作用是建立反铁磁体內磁矩有序排列的基本因素。但相对論的相互作用，則使反铁磁体的磁性质变成各向异性的。

有一些磁对称类型容許铁磁性的存在，但其中的交換相互作用本身，并不会单独引起反铁磁性。在这些情况下，自发磁化只是由于相对論相互作用的結果，因而是很小的。这种物体是反铁磁

体，但其中磁矩的排列与純粹的反铁磁体有所差别，以致在一定方向上，磁矩不完全互相抵銷(И. Е. 迪亚洛希斯基，1957)①。"铁磁磁矩"与铁磁体在純铁磁有序化时所取的数值之比，和相对論能量密度与交换能密度之比($\sim10^{-3}$—10^{-5})为同一数量級。

在相当强的磁場內，晶体的反铁磁結构在热力学上是不稳定的，只有全部磁矩的取向与磁場方向平行时，在能量上才变成有利。这种取向的变化通常与晶体点陣磁結构內晶胞的改变(減小)有关，而且和对称性质的任何改变一样，这种变化也只能发生在一定的相变点处。这在大多数情况下是第二种相变点。破坏反铁磁性的"临界場"$H_{临界}$为溫度的函数，当$T=\Theta$时变为零，其中Θ是沒有外場时的相变点。由此可見，在T, H图上，反铁磁相存在的区域被一曲綫所包圍。

① 参閱 И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ, 32, 1517. 1957.

第六章　超导电性

§ 41. 超导体的磁性质

許多金屬在溫度接近絕对零度时轉变为一种特殊状态，这种状态最明显的一个特性(由卡末林-奥涅斯在 1911 年最先发現)是所謂超导电性，即对恒定电流完全不存在电阻。对超导电性的发生，每一种金屬有一定的溫度，称为超导态轉变点。

但是，不存在电阻实际上并不是超导体的主要性质。轉变为超导状态所发生的最深刻变化，是金屬的磁性质。如我們将見到的，电性质是这些变化的必然結果。

超导性金屬的磁性质可以描写如下。磁場永远不会透入超导体內部。因为按照定义，媒质內的平均磁場强度为磁感应强度 B，因而可以換一种說法，在超导体內，

$$B=0 \tag{41.1}$$

(B. 迈斯厄，P. 奥克塞菲耳特，1933 年)。这性质的存在与实际上在何种条件下轉变为超导状态无关。例如，如果金屬在磁場內冷却，则在轉变点处，磁力綫将从物体上“被逐出去”。

但是应該着重指出，B=0 并不是屬于超导体很薄的表面层。实驗指出，磁場能够透入超导体的一定深度，这深度比原子的間距大得多(通常为 10^{-5} 厘米的数量級)，并且和金屬的种类及溫度有关。由于这一原因，在厚度或綫度和透入深度同数量級的金屬薄膜或胶态粒子內，等式 B=0 一般地不成立。

下面我們只研究相当大的重超导体，并且完全略去磁場透入

薄表面层的事实①。

我們知道，在任何两种媒质的分界面上，磁感应强度的法向分量必須是連續的（这条件是方程 $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ 总是正确的必然結果）。因为在超导体內，$\mathbf{B}=0$，因此在超导体表面，外磁場的法向分量也等于零，也即是超导体外的磁場处处与超导体表面相切；磁力綫繞过超导体。

考虑到这种情况后，很容易求出磁場內的超导体所受的力。和§5內对电場內的普通导体所进行的类似，我們求得这力为 $\sigma_{ik}n_k$（屬于单位面积），其中

$$\sigma_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(H_iH_k-\frac{H^2}{2}\delta_{ik}\right)$$

是眞空內磁場的麦克斯韦应力張量。因为在現在的情况下，$\mathbf{nH}_e=0$（$\mathbf{H}_e$ 是物体表面外的磁場），于是我們得到

$$\mathbf{F}_{表面}=-\mathbf{n}\frac{H_e^2}{8\pi},\tag{41.2}$$

即作用在物体表面的力是压縮力，其数值等于場能密度。

根据方程(27.4)

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}};\tag{41.3}$$

于是从方程 $\mathbf{B}=0$ 得出，超导体內的平均电流密度也处处等于零。換句話說，在超导体內，不可能有任何宏观的体电流。在此应着重指出的是，在超导体內，要和在普通导体中一样，从 $\overline{\rho\mathbf{v}}$ 內分出傳导电流是沒有意义的。由于这一原因，在我們的理論內引入磁化

① 在这里我們不討論磁場透入超导体內的"透入深度"的理論，因为它不具有唯象的特征。

应該着重指出，在我們的討論中，我們所指的都是"純"超导体——金屬元素和具有确定化学組分的化合物。在超导合金內，迈斯厄效应的表現不完全，因为透入深度有重大增加。在这里我們也不去研究这些問題。

强度 M 以及矢量 H，也是沒有物理意义的。

由此可見，超导体內流过的任何电流都是面电流。面电流密度 g，按照(27.14)式，由超导体边界上感应强度的切向分量的突变值得出。因为在超导体內，$\mathbf{B}=0$，而在超导体外，B 与 H 相等，因而，

$$\mathbf{g}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{H}_e]. \tag{41.4}$$

面电流本身的存在，并不只是超导体的特征。在任何通常的磁化物体內，也存在这种电流，它們的密度为

$$\mathbf{g}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}, \mathbf{H}_e-\mathbf{B}].$$

因为在正常导体表面(非超导体)，矢量 $\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu}$ 的切向分量是連續的，因此得到 $[\mathbf{n}\mathbf{H}_e]=\frac{1}{\mu}[\mathbf{n}\mathbf{B}]$，于是 g 的表达式可以写成

$$\mathbf{g}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{B}]\frac{1-\mu}{\mu}. \tag{41.5}$$

但是，研究物体横截面上流过的总电流时，超导体和普通导体就显現出原则性的差别。在非超导体內，表面电流总是互相抵銷的，因而不存在任何总电流；这可由条件(41.5)看出，它把电流密度 g 与导体內的磁感应强度联系起来，并通过磁感应强度把表面各点处的电流 g 联系起来。但是，在超导体內，条件(41.5)失去意义。实际上，磁导率为 μ 的普通导体轉变为超导体，在形式上表明必須同时令 $B\to 0$ 和 $\mu\to 0$。但是这时(41.5)式的右側变成不确定的，因而实质上并不存在任何限制电流的可能数值的条件。

这样一来，我們得到一个重要的結果：流过超导体表面的电流，可以使超导体內有不为零的总电流流过。当然，只有在多联物体(例如环)或构成閉合电路一部分的单联超导体內，才会有这种

情况，而在这种閉合电路內接有电动势源来維持电路內非超导体部分的电流。

重要的是，即使沒有外加电場，在超导体內也可能有稳定的总电流流过。这表明，电流流过时不发生能量耗散，因为要补充这种能量耗散，必須有外場作功。超导体的这种性质，也可以描写为超导体內不存在电阻，由此可見，这是超导体磁性质的必然結果。

§42. 超导电流

我們更深入地来研究一下与形状有关的超导体的某些性质。

如果超导体是单联物体，則沒有外磁場时，在超导体內一般不可能有任何稳定的面电流流过。

这由下面的討論可以证明这一点。表面电流在超导体周圍空間內产生恒定的磁場，这磁場在无穷远处变为零。和真空內的恒定磁場一样，它是一种势場，由于超导体上的边界条件，在超导体表面，場势的法向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$必須为零。但是，由势論可知，如果在单联物体表面和无穷远处，$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$，則在物体外的整个空間內，$\varphi=0$。由此可見，不可能存在恒定磁場以及表面电流。

外磁場在单联超导体表面感生出电流，这电流可从整个超导体产生一定的磁矩观察出来。对橢球状的超导体，我們很容易算出这种“磁化”①。

設 $\mathfrak{H}$ 为与橢球一个主軸平行的外磁場。对于非超导橢球內的磁場，存在下列关系式:

$$(1-n)H+nB=\mathfrak{H},$$

式中 n 是該主軸上的退磁系数〔参閱(8.7)式〕。在超导体內，如上

① 在这一节內假定磁場的数值不超过使超导电状态破坏的数值(参閱§43)。

面所指出的，"場强"$\mathbf{H}$ 沒有物理意义，因此磁化强度

$$M=\frac{B-H}{4\pi}$$

也失去通常的意义。尽管如此，在現在的情况下，我們从純粹形式的观点引进 H 和 M 作为輔助量，来計算具有实际物理意义的总磁矩 $\mathscr{M}=MV$（V 是橢球的体积），仍是很方便的。对于超导橢球，令 $B=0$，我們得到

$$H=\frac{\mathfrak{H}}{1-n}, \tag{42.1}$$

于是

$$\mathscr{M}=-\frac{VH}{4\pi}=-\frac{V\mathfrak{H}}{4\pi(1-n)}. \tag{42.2}$$

特別是对纵向場內的長柱体而言，$n=0$，因而 $H=\mathfrak{H}$ 和

$$\mathscr{M}=-\frac{V\mathfrak{H}}{4\pi}①,$$

$\mathscr{M}$ 的这些数值和仿佛超导体具有体积抗磁化率 $-\frac{1}{4\pi}$ 时所得到的相同。

橢球表面外的磁場 $\mathbf{H}_e$，处处与表面相切，因而它的数值可直接由 $\mathbf{H}$ 的切向分量为連續的条件得出。在橢球內，$\mathbf{H}=\frac{\mathfrak{H}}{(1-n)}$；把这一矢量投影到切綫方向，我們得到

$$H_e=\frac{\mathfrak{H}}{1-n}\sin\theta, \tag{42.3}$$

式中 θ 为外磁場 $\mathfrak{H}$ 的方向与橢球面給定点处的法綫之間的夾角。在橢球的赤道上，H_e 具有最大值，等于 $\frac{\mathfrak{H}}{(1-n)}$。

---

① 超导柱体的这些关系式是 H 为連續的这一条件的直接結果，因此，对于截面为任何形状的柱体（不一定是圓截面的），这些关系式都正确。

还必须着重指出，引起超导体"磁化"的电流和在超导体内产生总电流的电流之間，幷沒有任何原則性的差别：它們的物理性质完全相同。特别是从这种重要情况，可以直接求出任何超导体的迴轉磁系数。实际上，产生"磁化"电流的粒子(电子)的动量密度，与这些电流密度的差别只是多一个因子$\frac{m}{e}$(e和m分别为电子的电荷和质量)。根据迴轉磁系数的定义〔参閱(35.3)式〕，由此立即得出，在超导体内，总是

$$g_{ik}=\delta_{ik}.$$

我們来研究多联超导体。它們的性质与单联物体有很重大的差别——这首先是因为对于多联超导体，不再适用外磁場不存在时不可能有稳定的表面电流流过这一推論。其次是表面电流不再相互抵銷，因而即使沒有外加电动势，也会引起超导体内有稳定的总"超导"电流流过。

我們来研究沒有外加磁場的双联超导体(环)，幷且証明它的状态完全由其中流过的总电流J决定。求这种环所产生的磁場的問題，也可当作势論問題来解决，只是場势φ現在是多値函数，当繞穿过环孔的任何閉合綫路一周时，这函数改变$\frac{4\pi J}{c}$(参照§29)。为了使問題的提出在数学上更为精确，我們必須沿跨越环孔的任何面作一空間的"剖面"。于是問題就变成解拉普拉斯方程，而其边界条件为：在环面上，$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$，在无穷远处，$\varphi=0$，以及在所选擇的剖面上，$\varphi_2-\varphi_1=\frac{4\pi J}{c}$，其中$\varphi_2$和$\varphi_1$是这面两側的場势値。由势論可知，这問題具有单値的解(与所选擇的剖面形状无关)。根据环表面附近的場分布，也可以单値地求出环內面电流的分布。

除了电流的分布外，超导环的自感系数也是一个完全确定的

量。在这方面，与普通导体有重大的差别，在普通导体内，电流分布以及自感的精确数值，与电流的激发方式有关(§ 33)[1]。

在 § 32 内，我們曾引进了通过綫导体迴路内的磁通量 Φ 的概念，并且证明了 $\Phi=\frac{LJ}{c}$，其中 L 为导体的自感。对于超导环，磁通量的概念，当环为任何厚度时(并不一定限于很小)，都不失去意义。实际上，由于磁場指向切綫方向，因而通过环表面任何部分的磁通量等于零。因此，通过跨越超导体环孔的表面的磁通量，与这面的选擇无关。

而且公式

$$\Phi=\frac{1}{c}LJ \tag{42.4}$$

也仍然有效，自感 L 和前面一样，可由电流磁場的总能量得出。超导体磁場的总能量，由对超导体外的整个空間进行的积分 $\int\frac{H^2}{8\pi}dV$ 給出。如上面已指出的，沿某一表面 C 作一空間的"剖面"后，我們可以引进場势，并写为

$$\int\frac{H^2}{8\pi}dV=-\int\frac{\mathbf{H}\nabla\varphi}{8\pi}dV=\int\frac{\varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{H}}{8\pi}dV-\int\frac{H_n\varphi}{8\pi}df.$$

第一个积分等于零，因为 $\mathrm{div}\,\mathbf{H}=0$。第二积分对无穷远表面、环面以及表面 C 的两側进行。在头两个积分内，被积式变为零，因而剩下积分：

$$\int\frac{H^2}{8\pi}dV=\frac{1}{8\pi}\int_C H_n(\varphi_2-\varphi_1)df=\frac{J}{2c}\int_C H_n df=\frac{J\Phi}{2c},$$

---

[1] 由圓截面导綫(半徑为 a)作成的細超导体环(半徑为 b)的自感和非超导体环自感的外部分相同，并由下式得出：

$$L=4\pi b\left(\ln\frac{8b}{a}-2\right)$$

(参閱 § 33. 例題 2)。关于超导圓电流問題的精确解，已由B. A. 福克(Фок)得出(Phys Zs. d. Sowjetunion 1, 215, 1932)。

式中 Φ 是通过表面 C 的磁通量。把这个式子与 $\frac{LJ^2}{2c^2}$ 比較（按照自感定义），我們就得到所求的(42.4)式。

如果环在外磁場內，則总磁通量 Φ 包括本身的磁通量 $\frac{LJ}{c}$ 和外場的磁通量 Φ_e。超导体环最重要的一个性质是，当外場和电流发生任何变化时，通过环的总磁通量仍然不变：

$$\frac{1}{c}LJ+\Phi_e=\text{常数}\equiv\Phi_0. \tag{42.5}$$

这可从导体外空間內的麦克斯韦方程的积分形式直接得出：

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_C \mathbf{H}d\mathbf{f}=-\oint \mathbf{E}d\mathbf{l}.$$

如果对跨越环孔的表面 C 进行积分，則等式右側的积分迴路为环面上的直綫。但是在超导体面上，$\mathbf{E}$ 的切向分量等于零（因为在超导体內，$\mathbf{E}=0$，而 $\mathbf{E}_t$ 在表面上是連續的）。因此，等式右側变为零，于是我們求得 $\frac{d\Phi}{dt}=0$。

由关系式(42.5)，可以求出外磁場改变时环內电流的变化。例如，如果环在通量为 Φ_0 的外磁場內轉变为超导状态，然后除去这磁場，則在环內将感生出稳定的电流，等于 $J=c\Phi_0/L$。

通过超导环的磁通量不变，不但外磁場改变时如此，就是环的形状改变或环在空間內移动时，也是如此[①]。可以形象地說，磁力綫永远不会与超导体表面相交，因而也不可能从超导环孔內"伸出"。

上面的結果可以直接推广到任何次联的超导体情况，其中包括任何数目的环。沒有外加磁場时的 n 联系統的状态，由总电流

① 从感应电动势与导体移动时所引起的迴路内磁通量变化的关系式，可以直接证明这一論断（§49）。

J_a 的 n 个值决定。于是(42.5)式可以推广为方程組:

$$\sum_b L_{ab}J_b+\Phi_a^{(e)}=\Phi_{a0}. \tag{42.6}$$

这些方程不但当外加磁場改变时正确，而且当物体的形状或相互位置改变时也是正确的。

例　　題

試求与外磁場垂直的超导盘的磁矩①。

解。恒定磁場內的超导体問題，在形式上与介电常数为 $\varepsilon=0$ 的电介质的靜电学問題相同。我們把圓盘看作 $c\to0$ 时的迴轉橢球的极限情況（参照§4例題4），利用(8.9)式，并对符号作相应的改变（場 $\mathfrak{H}$ 指向 z 軸），于是得到

$$\mathscr{M}=-\frac{2a^3}{3\pi}\mathfrak{H}.$$

§ 43. 临界場

纵向磁場內的柱形超导体，具有附加的磁能，并等于

$$-\frac{\mathfrak{H}\mathscr{M}}{2}=\frac{\mathfrak{H}^2V}{8\pi}.$$

在正常状态下（非超导态），加上外磁場时柱体的总能量实际不变（这里和下面，我們略去非超导金屬的弱抗磁性和順磁性，也即是假定 $\mu=1$）。由此看出，在相当强的磁場內，金屬的超导态比起正常态在热力学上更为不利，因此，超导性必然遭到破坏。

在柱形超导体內，使超导性遭到破坏的纵向磁場强度的数值，决定于金屬的种类及其溫度（以及压强）。这种磁場值称为临界場

① 在这里研究这一問題，主要是为了在后面应用（§75，例題2）。对于超导圓盘，实际上所指的是相当微弱的磁場，因为在这样的条件下，超导性很容易受到破坏（参閱§43）。

($H_{临界}$)；它是超导体的重要特性之一①。

当磁場达到临界值后，整个柱体內的超导性遭到破坏，这是因为在这种柱体的全部表面上，磁場是均匀的。但是，在其他形状的超导体內，超导性遭到破坏是一个更为复杂的过程，其中物质在正常态下所占的体积，在 $\mathfrak{H}$ 值的整个范圍內逐漸增加(关于这一点将在下一节內更詳細地討論)。

由此可知，在低于轉变点的任何溫度下，金屬可为超导态(s)，也可为正常态(n)。我們用 $\mathscr{F}_{s0}(V,T)$ 和 $\mathscr{F}_n(V, T)$ 分別表示沒有外加磁場时超导体和正常物体的总自由能。这些表征物质特性的量，当然只和物体的体积有关，而与导体的形状无关。在 n 态內的自由能，在加上外磁場后一般不改变(因此我們在 $\mathscr{F}_n$ 的下角标上不添上 0)。但在 s 态內，磁場使自由能发生重大的改变。当 T 与 V 为給定时，在纵向外磁場 $\mathfrak{H}$ 內，柱形超导体的自由能为

$$\mathscr{F}_s=\mathscr{F}_{s0}(V,T)+\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}V. \tag{43.1}$$

由此可以求得其余的热力学量。将(43.1)式对体积求微分，求得超导体上所受到的压强为

$$p=p_0(V,T)-\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, \tag{43.2}$$

式中 $p_0(V, T)$ 为沒有外加磁場时的压强(保持 V，T 不变)。由等式(43.2)可以求得 p, V 和 T 之間的关系式，也即是(43.2)式是外磁場內的超导柱体的状态方程。我們看到，有外加磁場时的体积 $V(p,T)$，和沒有外加磁場而压强为 $p+\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}$ 时的体积相同。当然，这結果和磁場內超导体表面所受到的力(41.2)式是符合一致的。

① 只在我們所研究的"純"超导体內，从超导态轉变为正常态才是急剧的(参閱 232 頁上的底注)，在合金內，超导性受到破坏和磁場透入到合金內部是逐漸发生的，并且場的范圍較广 因而正文內所指的临界場，对于这些超导性不存在。

超导柱体的热力学势① 等于

$$\mathscr{P}_s=\mathscr{F}_s+pV=\mathscr{F}_{s0}(V,T)+p_0V,$$

在这里体积 V 必須按照(43.2)式用 p 和 T 表示。因此，可以把 $\mathscr{P}_s(p,T)$ 写成下面的形式:

$$\mathscr{P}_s(p,T)=\mathscr{P}_{s0}\left(p+\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi},\ T\right), \tag{43.3}$$

式中 $\mathscr{P}_{s0}(p,T)$ 是沒有外加磁場时的热力学势。将这等式对 T 和 p 求微分，得到熵和体积間的相似关系式:

$$\mathscr{S}_s(p,T)=\mathscr{S}_{s0}\left(p+\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi},\ T\right), \tag{43.4}$$

$$V_s(p,T)=V_{s0}\left(p+\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi},\ T\right). \tag{43.5}$$

現在可以写出确定临界場的条件。当 $\mathscr{P}_n$ 小于 $\mathscr{P}_s$ 时(保持 p 和 T 不变)，柱体从 s 态轉变为 n 态。在轉变点处必須 $\mathscr{P}_s=\mathscr{P}_n$，即

$$\mathscr{P}_{s0}\left(p+\frac{H^2_{临界}}{8\pi},\ T\right)=\mathscr{P}_n(p,T). \tag{43.6}$$

这是精确的热力学关系式②。在磁場內热力学势的改变通常是代表对 $\mathscr{P}_{s0}(p,T)$ 的一个小改正。于是(43.6)式的右側可以展开为級数，展开式的头几項为

$$\mathscr{P}_{s0}(p,T)+\frac{H^2_{临界}}{8\pi}V_{s0}(p,T)=\mathscr{P}_n(p,T), \tag{43.7}$$

式中 $V_{s0}(p,T)=\partial\mathscr{P}_{s0}\dfrac{(p,T)}{\partial p}$，是沒有外加磁場时的超导柱体的体积。由此可見，在这种近似內，可以說，物质在正常状态的热力学

① 这里 $\mathscr{P}$ 的定义和 §12 內相同.

② 我們計算的精确度比通常所要求的高，为的是更为明显地显現出不同热力学量間的相互关系。

势(属于单位体积)比在超导态大$\frac{H_{临界}^2}{8\pi}$。

我們用$T_{临界}=T_{临界}(p)$表示沒有外加磁場时的轉变溫度。实驗指明，在这点上的轉变是第二种相变。因此，特别是，当$T=T_{临界}$时，$H_{临界}(T)$必須連續地趋近于零。从第二种相变的普遍理論可知[①]，在轉变点附近，热力学势的改变与溫度差$(T-T_{临界})$的平方成正比。因而从(43.7)式可以作出結論，在$T_{临界}$附近，临界場按下列綫性規律随溫度而变化：

$$H_{临界}=常数\cdot(T_{临界}-T). \tag{43.8}$$

根据$H_{临界}$对T的关系曲綫，我們将(43.6)等式两側对溫度求微分(保持压强不变)。这时考虑到(43.4)和(43.5)式，我們得到

$$\mathscr{S}_n-\mathscr{S}_s=-V_s\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H_{临界}^2}{8\pi}\right), \tag{43.9}$$

式中全部的$\mathscr{S}_n$，$\mathscr{S}_s$，V_s系对物体的两种态間的轉变点而言(也即是对磁場$H=H_{临界}$而言)。将上面的等式乘上T，我們求得轉变热为

$$Q=T(\mathscr{S}_n-\mathscr{S}_s)=-\frac{V_sH_{临界}T}{4\pi}\left(\frac{\partial H_{临界}}{\partial T}\right)_p. \tag{43.10}$$

当在$T=T_{临界}$的点处发生轉变时(沒有外加磁場)，則Q与$H_{临界}$一道变为零，这和我們在这里所遇到的是第二种相变的事实相符合。$T<T_{临界}$时(在磁場內)的轉变，引起热量的吸收或放出，也即是为第一种相变。实驗指出，从$T_{临界}$到0的范圍內，$H_{临界}$随溫度的降低单調地增加。因此，导数$\frac{dH_{临界}}{dT}$总是負的，而且从(43.10)式看出，$Q>0$，也即是从超导态(等溫地)轉变为正常态时吸收热量。

按照能斯脫定律，当$T\to 0$时，任何物体的熵都必須变为零。

---

① 参閱“統計物理学”第三版，§131，1951。

因此从(43. 9)式看出，当 $T=0$ 时，必須$\frac{\partial H_{临界}}{\partial T}=0$，也即是曲綫 $H_{临界}=H_{临界}(T)$ 与 H 軸正交。

我們将(43. 9)式內的 $\mathscr{S}_n-\mathscr{S}_s$ 之差再对溫度求微分一次，并再利用等式(43 4)和(43. 5)。这时还考慮到

$$\left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial p}\right)_T=-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

結果得到

$$\frac{\partial \mathscr{S}_n}{\partial T}-\frac{\partial \mathscr{S}_s}{\partial T}=-V_s\frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(\frac{H^2_{临界}}{8\pi}\right)-2\frac{\partial V_s}{\partial T}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H^2_{临界}}{8\pi}\right)-$$
$$-\frac{\partial V_s}{\partial p}\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H^2_{临界}}{8\pi}\right)\right)^2. \qquad (43.\ 11)$$

在等式两側乘上 T，我們就得到两相的热容量之差(保持压强不变)。包含有物质热膨脹系数和压縮系数的項，通常比其余各項小得多；略去这些項以后，我們得到

$$\mathscr{C}_s-\mathscr{C}_n=\frac{V_sT}{4\pi}H_{临界}\frac{\partial^2 H_{临界}}{\partial T^2}+\frac{V_sT}{4\pi}\left(\frac{\partial H_{临界}}{\partial T}\right)^2. \qquad (43\ 12)$$

直接把(43. 7)的近似关系式求微分，也可以得到这一公式。在这种近似內，V_s 和 V_{s0} 的差別不重要；还可以假定 $\mathscr{C}_s$ 和 $\mathscr{C}_{s0}$ 相等。

当 $T=T_{临界}$ 时，(43. 132)式內的第一項变为零，于是我們就得到下面的公式，它把第二种相变时所发生的热容量突变(沒有外加磁場)和 $H_{临界}$ 的溫度依賴关系联系起来：

$$\mathscr{C}_s-\mathscr{C}_n=\frac{V_sT}{4\pi}\left(\frac{\partial H_{临界}}{\partial T}\right)^2 \qquad (43.\ 13)$$

(卢盖斯，1933 年)。由此看出，特別是在这种情况下，$\mathscr{C}_s>\mathscr{C}_n$。当溫度降低时(也即是当超导电性被磁場破坏时)，差值 $\mathscr{C}_n-\mathscr{C}_s$ 改变正負号，这是因为差值 $\mathscr{S}_n-\mathscr{S}_s$ 在 $T=0$ 或 $T=T_{临界}$ 时变为零，因而在这一范圍內必須有一极大值。

由相似方式，可以研究轉变时由体积变化所引起的效应。为

此，根据 $H_{临界}$ 对 p 的关系曲綫，将(43.6)式对压强取微分(保持温度不变)；于是得出

$$V_n=V_s\frac{\partial}{\partial p}\left(p+\frac{H^2_{临界}}{8\pi}\right),$$

或

$$V_n-V_s=\frac{V_sH_{临界}}{4\pi}\frac{\partial H_{临界}}{\partial p}, \tag{43.14}$$

由这些式子可以求出轉变时的体积变化[①]。在 $T=T_{临界}$ 的点处，这个差值和熵的差值一样，变为零。于是在 $T<T_{临界}$ 的温度下的轉变，伴随发生体积的变化，根据导数 $\left(\frac{\partial H_{临界}}{\partial p}\right)_T$ 的正負号，这体积变化可以有两个号。当 $T=T_{临界}$ 时，体积不发生变化，但压縮系数有突变，由把(43.14)式微分，很容易求出这种突变值。

我們注意到，如果在(43.14)式内代入下式：

$$\left(\frac{\partial H_{临界}}{\partial p}\right)_T=-\left(\frac{\partial H_{临界}}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{H_{临界}}$$

[由把方程 $H_{临界}(p,T)=$ 常数微分，即可得到它]，則我們就得到"克拉珀龙-克劳修斯方程"：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{H_{临界}}=\frac{Q}{T(V_n-V_s)}, \tag{43.15}$$

式中的导数 $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{H_{临界}}$ 給出温度改变时使外加磁場恰为临界場所需的压强变化。

临界場 $H_{临界}$ 的物理意义，要比用超导柱体的行为来定义它

---

① 不言而喻，应該把这差值与場从零变到 $H_{临界}$ 时超导体体积的改变(磁致伸縮)区别开来。后者可由(43.5)式求得

$$V_s(p,T)-V_{s0}(p,T)\cong\frac{H^2_{临界}}{8\pi}\left(\frac{\partial V_s}{\partial p}\right)_T.$$

质体现出来的更为广泛。等式 $H=H_{临界}$ 是同一物体内超导相(s)和正常相(n)的分界面上各点所必須满足的平衡条件。这可从下面的簡单討論明显看出。如果柱体在恰好等于 $H_{临界}$ 的纵向磁場内，則磁場的边界条件以及热力学稳定条件，对于物体的內柱体部分在超导态內而外部分在正常态的全部状态都必須同样得到满足。这时在分界面上，$H=H_{临界}$。由此可知，$H=H_{临界}$ 的分界面相对于它的位置而言处于“中性平衡”。这也就是表征相平衡的特性。

在交变磁場內，超导相和正常相的分界面是移动的。这种移动过程的动力学是相当复杂的，对它进行研究，需要同时解电动力学方程和导热方程，并考虑到相变时所放出的热量。我們在这里不作深入的研究①，只是指出 n 相和 s 相間的运动分界面所应满足的边界条件。

为了导出这一边界条件，我們来研究以速度 $\mathbf{v}$(两相間的分界面的移动速度)运动的坐标系 K'。按照熟知的場变换公式，在坐标系 K' 內的电場 $\mathbf{E}'$，可用靜止坐标系內的場$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$来表示，即

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]$$

〔参閱(49.1)式〕。因为在坐标系 K' 內分界面是靜止的，因此在分界面上，适用 $\mathbf{E}'$ 的切向分量为連續的普通条件，即

$$[\mathbf{nE}']=[\mathbf{nE}]-\frac{v}{c}\mathbf{B}$$

($\mathbf{n}$ 是表面法綫方向的单位矢量，指向速度 $\mathbf{v}$)。在超导相內，$\mathbf{E}=0$，$\mathbf{B}=0$，而在正常相內(在边界上)，$B=H_{临界}$。因此我們发现，在运动的分界面上出現切向电場，它与磁場垂直，并且等于

① И. М. 栗弗席兹对这問題进行了全面的研究(ЖЭТФ), **20**, 834, 1950; ДАН СССР **90**, 363, 1953)。

$$E=\frac{v}{c}H_{临界} \tag{43.16}$$

§ 44. 中間态

如果任意形状的超导体在場强逐漸增加的外磁場內，那末最后在超导体表面的某一点处，磁場值将达到临界值 $H_{临界}$，而 $\mathfrak{H}$ 本身則仍小于 $H_{临界}$。例如，在橢球面上(位于与橢球一軸平行的磁場 $\mathfrak{H}$ 內)，磁場在赤道上具有最大值〔参閱(42.3)式〕；而当 $\mathfrak{H}=H_{临界}(1-n)$ 时它已經达到 $H_{临界}$ 值。

当 $\mathfrak{H}$ 进一步增加，物体已不可能全部在超导态內。它也不可能完全轉变为正常态，因为这时磁場处处等于 $\mathfrak{H}$。因此超导电性一部分遭到破坏。

初看起来，似乎可以这样来設想这种破坏过程。随着 $\mathfrak{H}$ 的增加，在导体体积逐漸增加的部分，超导性遭到破坏，而在相应减小的部分仍然是超导态；当 $\mathfrak{H}=H_{临界}$ 时，整个物体都轉变为正常态。但是，容易看出，物体的这种状态在热力学上是不稳定的。为此我們記住，在超导相和正常相的分界面上，磁場与表面相切(其値等于 $H_{临界}$)，换句話說，磁力綫在这表面內。如果分界面向正常相一边突凸，則場的等势面垂直于磁力綫，将向正常相区域內散开(如图 22*a* 內虛綫所示)。但是在等势面散开的方向上，磁場值减小，于是在斜綫区域內为 $H_{临界}<H$，这和在这区域內存在正常态的假設矛盾。如果超导相的边界是凹向的，則这边界上的磁力綫过渡到超导区域的自由面上(磁場与它相切)有一拐点(图 22б 上的 O 点)。但是在力綫的拐点处，磁場

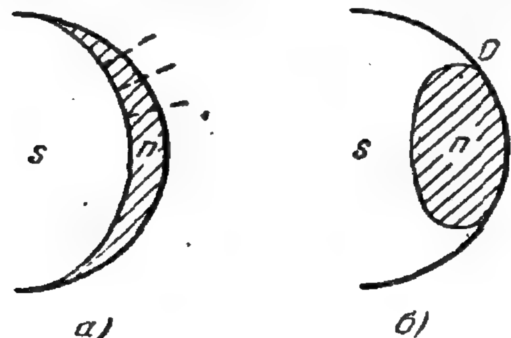


图 22

变为无穷大，这又和超导体面上的边界条件矛盾。

上面的討論实质上代表铁电体和铁磁体內形成磁疇結构的另一方面。而且根据热力学的穩定条件，若在物体表面的某一点处磁場达到了临界值$H_{临界}$，則物体即分解为許多平行而薄的相互交疊的正常层和超导层(Л. 朗道, 1937)。超导体的这种奇异态称为**中間态**。随着$\mathfrak{H}$的增加，正常层的总体积也增大，一直到$\mathfrak{H}=H_{临界}$时物体全部轉变为正常态为止。

应着重指出，在物体为任意形状的普遍情况下，全部体积不一定都在中間态內。其中也可能有純粹的超导态区域和純粹的正常态区域，它們都与中間态区域相連，但彼此并不直接接触。在这方面，上面提到的橢球体是最簡单的情况。在与橢球軸平行的磁場內，中間态发生在下面的范圍內:

$$H_{临界}(1-n)<\mathfrak{H}<H_{临界}, \tag{44.1}$$

而且全部橢球体积都在这状态內[①]。

中間态內n层和s层的形状和大小，取决于整个物体的热力学平衡条件，这和确定铁磁体內磁疇形状的情况相似(§ 39)。对前面一样，层的厚度决定于两种相反作用的因素。n相与s相的分界面上的"表面張力"趋向于減少层的数目，即增加层的厚度。层在物体自由面上的"脫出能"則起着相反的作用。物体的綫度增加，层的厚度也增加，結果在接近物体表面时[②]，必須发生层的分支現

① 例如，在球体內，$n=\frac{1}{3}$，中間态的区域扩展到$\frac{2}{3}H_{临界}<\mathfrak{H}<H_{临界}$的范圍，在横向場內的柱体，$n=\frac{1}{2}$，中間态的范圍为$\frac{1}{2}H_{临界}<\mathfrak{H}<H_{临界}$。在纵向場內的柱体，$n=0$，中間态一般不存在，而当$\mathfrak{H}=H_{临界}$时，超导电性完全被破坏。末了，对于横向場內的平行平面板，$n=1$，在$\mathfrak{H}<H_{临界}$的任何場內，它都在中間态內。

② 未分支层的厚度的計算，参閱本节例題 2。多分支层模型的計算，参閱 Л. 朗道的論文，ЖЭТФ, **13**, 377, 1943。

E. M. 栗弗席茲和 Ю. В. 沙尔維的論文，研究了两模型的相互关系 ДАН СССР **79** 783, 1951。

在一定的条件下(外場接近于零或$H_{临界}$)，热力学上更为有利的不是层状結构，而是"綫状"結构，参閱 E. R. Andrew, Proc. Roy. Soc. **194A** 98, 1948。

象(其原因和铁磁体磁疇相同)。

如果所研究的物体內的区域大于层的厚度，則描写中間态也可采用取平均值的方式(P. 派耳斯, F. 倫敦, 1936)。在这种描写方式中，假定物体內部有磁感应强度 $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ 的值从零(在純粹超导态內)增到 $H_{临界}$(在純粹正常态內)。如果对中間态的物质我們添上一个不为零的感应强度，則我們也必須对它添上一定的磁場"强度"$\overline{\mathbf{H}}$。为了求出这两个量的关系，必須研究中間态的眞实結构。

在正常层与超导层的交界面上，正常层內的磁場等于 $H_{临界}$，由于假定了层很薄，因此可以认为，在整个正常层內，磁場都是这个值。在超导层內，$\mathbf{B}=0$。因此，对比层的厚度大的体积求磁場的平均值，我們得到，平均感应强度为 $\bar{B}=x_n H_{临界}$，式中 x_n 是在正常态內的体积部分，其次，我們来求出物体单位体积的热力学势，并且从相应于純超导态的值算起。在沒有外加磁場时，正常态的单位体积具有多余的热力学势 $\frac{H^2_{临界}}{8\pi}$①。当存在外磁場时，还必須加上磁場能量，于是得到 $\frac{H^2_{临界}}{4\pi}$。因而在中間态內，单位体积的平均热力学势等于

$$\Phi=\frac{H^2_{临界}}{4\pi}x_n=\frac{H_{临界}\bar{B}}{4\pi}. \tag{44.2}$$

按照普遍規則，由热力学关系式得到 $\overline{\mathbf{B}}$ 和 $\overline{\mathbf{H}}$ 的关系为

$$\mathbf{H}=4\pi\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{B}}.$$

在現在的情况下，我們得到，矢量 $\overline{\mathbf{H}}$ 与 $\overline{\mathbf{B}}$ 平行，而它的絕对值等于

$$\bar{H}=H_{临界}, \tag{44.3}$$

① 这里我們略去了全部磁致伸縮效应。在这些条件下，代替热力学势的改变，我們可以說成是与它相等的自由能的改变。

即有不依賴于感应强度的恒定值。

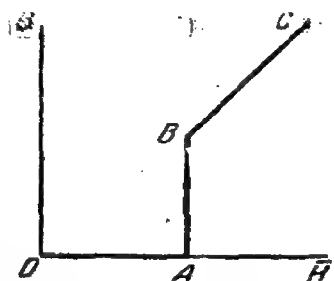


图 23

如果将 $\bar{B}$ 对 $\bar{H}$ 的关系用图表示(图 23)，則超导态相应于横坐标軸的 OA 段；正常态相应于 BC 直綫 $(\bar{B}=\bar{H})$。竪直綫 AB 段$(\bar{H}=H_{临界})$相应于中間态。

設 $\mathbf{n}$ 为平均磁場力綫方向上的单位矢量。我們写出 $\overline{\mathbf{H}}=H_{临界}\mathbf{n}$，并代入方程 $\operatorname{rot}\overline{\mathbf{H}}=0$(沒有体电流时是正确的)后，于是得到 $\operatorname{rot}\mathbf{n}=0$。另一方面，因为 $\mathbf{n}^2=1$，所以

$$\operatorname{grad}\mathbf{n}^2=2(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n}+2[\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n}]=0,$$

由此得到結論，$(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n}=0$。但这表明矢量$\mathbf{n}$的方向不变。由此可見，平均磁場的力綫为直綫。

把所得到的結果应用到中間态內的橢球上。对橢球內的均匀磁場，存在下列关系式：

$$(1-n)\bar{H}+n\bar{B}=\mathfrak{H},$$

B 和 H 为任何关系时，这公式都正确。这里令 $\bar{H}=H_{临界}$，我們得到

$$\bar{B}=\frac{\mathfrak{H}}{n}-\frac{1-n}{n}H_{临界}. \tag{44.4}$$

由此可見，橢球內的平均感应强度，按照綫性定律随外加磁場强度而改变，从 $\mathfrak{H}=(1-n)H_{临界}$ 时的零值增到 $\mathfrak{H}=H_{临界}$时的 $H_{临界}$值。

我們也可以写出中間态內的橢球的总热力学势$\widetilde{\mathscr{P}}$的表达式。为此，我們从普遍公式

$$\widetilde{\mathscr{P}}=\int\left[\Phi-\frac{\mathbf{HB}}{8\pi}-\frac{(\mathbf{B}-\mathbf{H})\mathfrak{H}}{8\pi}\right]dV$$

出发[与(31.7)式比較]，这个式子当 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 为任何关系时都适用。把(44.2)—(44.4)式中的 Φ, H, B 值代入上式，我們得到

$$\widetilde{\mathscr{P}}_t=\frac{V}{8\pi}\left[H_{临界}^2-\frac{1}{n}(H_{临界}-\mathfrak{H})^2\right]. \tag{44.5}$$

(V 为椭球体积)；这个值从沒有外加磁場时的純超导椭球的热力学势算起。对于外磁場 $\mathfrak{H}$ 內的超导椭球，我們有

$$\widetilde{\mathscr{F}}_s = -\frac{\mathscr{M}\mathfrak{H}}{2} = \frac{V\mathfrak{H}^2}{8\pi(1-n)}$$

[按照(31.6)和(42.2)式]。当 $\mathfrak{H} = H_{临界}(1-n)$ 时，这两式应該給出相同結果。

最后，我們着重指出，上面对中間态取平均值的描写方式，由于层的厚度比較大，实际上其精确度并不大。由于同一原因，从上面的描写中，一般漏去了与层状結构的特性有关的一些現象。其中一个事实是，当外加磁場增加时，从超导态轉变为中間态，实际上并不是恰在 $\mathfrak{H} = (1-n)H_{临界}$ 时发生，而是要稍迟一些。这种“延迟”的原因如下。当这状态成为热力学上穩定的，也即当 $\widetilde{\mathscr{F}}_t < \widetilde{\mathscr{F}}_s$ 时，才轉变为中間态。但是层状結构，除了取平均值的描写中所添上的純“体积”能(44.5)外，还有由于各层間存在分界面和在物体表面附近层的形状发生变化所引起的附加能。这种情况也使轉变点向磁場較强的一側移动①。

例　　題

1. 試求中間态內的椭球的热容量。

解. 将(44.5)式的热力学势对温度取微分，我們即得到熵和热容量。略去含有物体热膨脹系数的項，我們得到

$$\mathscr{C}_t - \mathscr{C}_s = \frac{VT}{4\pi n}\left[(1-n)(H'^2_{临界} + H_{临界}H''_{临界}) - \mathfrak{H}H''_{临界}\right]$$

(撇表示对 T 取微分)；$\mathscr{C}_s$ 是物体在超导态內的热容量(它对 $\mathfrak{H}$ 的微弱依賴关系，我們这里略去不考慮)。由此看出，在 $\mathfrak{H} = (1-n)H_{临界}$ 的点处，$\mathfrak{H}$ 变化时(温度不变)，物体的热容量从 $\mathscr{C}_s$ 突变到

$$\mathscr{C}_s + \frac{VT(1-n)}{4\pi n}H'^2_{临界},$$

① 关于这一点参閱 247 頁所指出的文献。

然后，按綫性定律随 $\mathfrak{H}$ 而改变到下列值（当 $\mathfrak{H}=H_{临界}$ 时）

$$\mathscr{C}_s-\frac{VT}{4\pi}\left(H'^2_{临界}+H_{临界}H'_{临界}\right)+\frac{VT}{4\pi n}H'^2_{临界}=\mathscr{C}_n+\frac{VT}{4\pi n}H'^2_{临界},$$

由此消去了增到 $\mathscr{C}_n$ 的突变。

2. 設平行平面板垂直于外加磁場 $\mathfrak{H}$，試求中間态內平行平面板的 n 层和 s 层的形状和大小；假設层不分支（Л. 朗道，1937）。

解. n 相和 s 相的区域代表与磁場方向平行的层，只在板面附近，层的平行平面性才遭到破坏。

磁力綫（图 24 上的虚綫）只穿过 n 层，而且 s 层的边界也是磁力綫（由于在其上条件 $B_n=0$）。同时还考虑到在 n 相和 s 相的分界面上，必須 $H=H_{临界}$，于是在 s 层的边界上的条件可写为

$$\left.\begin{array}{l}\text{在 } BC \text{ 段上：} H_x=0 \\ \text{在 } BA \text{ 段和 } CD \text{ 段上：} H_x^2+H_y^2=H^2_{临界}\end{array}\right\} \tag{1}$$

（坐标軸的选擇如图 24 所示）。在离板很远处，場 $\mathbf{H}$ 必須与外場 $\mathfrak{H}$ 相等，即

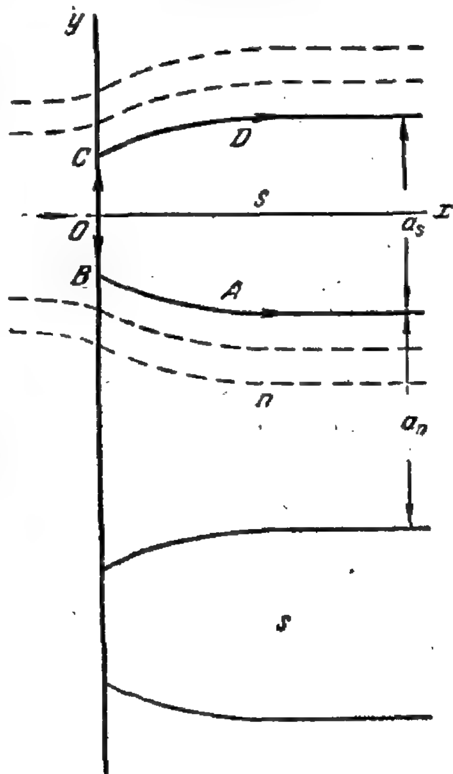


图 24

$$\text{当 } x\to-\infty \text{ 时}\quad H_x=\mathfrak{H},\ H_y=0. \tag{2}$$

按照下列公式引进場的标势和矢势：

$$H_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial A}{\partial y},\ H_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial A}{\partial x}$$

以及复数势 $w=\varphi-iA$（与 § 3 的第 3 节比較）。

在每条磁力綫上，$A=$常数。假設一力綫达到 O 点后分支为 OCD 和 OBA，并形成一个 s 层的边界，令在这力綫上 $A=0$。在两相邻 s 层的边界上，A 值之差等于通过綫段 $a=a_s+a_n$ 的磁通量，即等于 $\mathfrak{H}a$。因此在全部 s 层的边界上，A 值等于 $\mathfrak{H}a$ 值的整倍数。再引进“复数場强”：

$$\eta=H_x-iH_y=-\frac{dw}{dz},$$
$$z=x+iy,$$

我們把条件(1)写成

$$在\ BC\ 上：\mathrm{Re}\eta=0, \tag{3}$$

$$在\ BA\ 和\ CD\ 上：|\eta|=H_{临界},$$

引进一个新的量：

$$\zeta=e^{-\frac{2\pi w}{\mathfrak{H}\alpha}}-1 \tag{4}$$

并把 η 看作 ζ 的函数。在全部的边界力綫上（以及在板外的延长綫上），量 ζ 为实值：$\zeta=e^{-\frac{2\pi\varphi}{\mathfrak{H}\alpha}}-1$。

因为除一个常数外，φ 是完全确定的，因而可以任意地选擇一点处的 φ 值。設在 O 点处，$\varphi=0$。于是在这点处，$\zeta=0$。在所研究的边界力綫上，在离板很远处，$\zeta=-1$（因当 $x\to-\infty$ 时，我們有 $\varphi\to-\mathfrak{H}x\to+\infty$）。在 B 点处（或 c 点），磁力綫透入板內，我們把这点处的 ζ 表示为 ζ_0。在 CD 和 BA 的分支上，ζ 从 ζ_0 变到 ∞。于是条件(1)和(3)可以写成

$$当\ \zeta=-1,\ \eta=\mathfrak{H}, \tag{5}$$

$$当\ 0<\zeta<\zeta_0,\ \ \mathrm{Re}\eta=0;$$

$$当\ \zeta_0<\zeta,\ \ |\eta|=H_{临界}. \tag{6}$$

此外，函数 $\eta(\zeta)$ 必須处处有限。

条件(6)滿足函数

$$\eta=H_{临界}\left[\sqrt{1-\frac{\zeta_0}{\zeta}}-\sqrt{-\frac{\zeta_0}{\zeta}}\right]. \tag{7}$$

在 ζ 为实負值时，两根为实根，并取此处写出的正負号。当 $0<\zeta<\zeta_0$；两根为虛根，而且取为

$$\eta=\mp H_{临界}i\left[\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}}-\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}-1}\right]$$

“－”号或“＋”号分别相应于 OC 段和 OB 段。当 $\zeta>\zeta_0$，必須写为

$$\eta=H_{临界}\left[\sqrt{1-\frac{\zeta_0}{\zeta}}\mp i\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}}\right].$$

“－”号或“＋”号分别相应于 CD 段和 BA 段。ζ_0 值由条件(5)求出，并等于

$$\zeta_0=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{h}-h\right)^2, \tag{8}$$

此处引用了符号 $h=\dfrac{\mathfrak{H}}{H_{临界}}$。

将关系式 $dz=-\dfrac{dw}{\eta}$ 对 ζ 的实値进行积分，我們得到层的形状也即是边界力綫的方程为

$$z=-\int\frac{dw}{\eta}=\frac{ah}{2\pi}\int\frac{d\zeta}{\eta(\zeta+1)}.$$

把 $\eta(\zeta)$ 代入，分开实值部分与虚值部分，幷适当地选擇积分常数，得到 CD 力綫的参量方程为

$$x=\frac{ha}{2\pi}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\sqrt{1-\frac{\zeta_0}{\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta+1}=$$

$$=\frac{ha}{\pi}\left\{\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta_0}}-\sqrt{\zeta_0+1}\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{\zeta(\zeta_0+1)}{\zeta_0(\zeta+1)}}\right\}, \tag{9}$$

$$y=Y-\frac{ha}{\pi}\int_{\zeta}^{\infty}\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta+1}=Y-\frac{ha}{\pi}\sqrt{\zeta_0}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{\zeta}\right)$$

（$Y=\frac{a_s}{2}$，是 $x\to\infty$ 时的 y 坐标值，参閱图 24）。

层状結构的周期 a 与 s 层和 n 层的厚度 a_s 和 a_n 的关系为 $a=a_s+a_n$，$a\mathfrak{H}=a_nH_{臨界}$。第二个式子为完全通过 n 层的磁通量为連續的必然結果。由此得

$$a_s=a(1-h),\quad a_n=ha.$$

周期 a 由板的总热力学势取极小值的条件定出。在 n 相和 s 相的边界上，由于“表面張力”的存在，使板表面单位面积的热力学势內出現下面一項：

$$\mathscr{P}_1=\frac{2l}{a}\frac{H_{臨界}^2}{8\pi}\Delta.$$

其中 l 是板的厚度，而表面張力系数表示为 $H_{臨界}^2\frac{\Delta}{8\pi}$（$\Delta$ 为长度的量綱）。在計算这一部分能量时，在板面附近的层彎曲，当然可以略去不計。

在板的表面上，层的“脫出能”可以写为两部分之和。第一，n 层的体积比在整个范圍內保持平行平面性时所占的体积要增加，这就导至附加的能量为

$$\mathscr{P}_2=\frac{4}{a}\int_0(Y-y)dx\frac{H_{臨界}^2}{8\pi}$$

（因子 4 是考虑到在每一个 $\frac{1}{a}$ s 层的两側上有四个角——例如图 24 上的 B 和 C）。

第二，在板的表面上，层的伸出引起磁場內的系統的能量改变，即改变能

量$-\frac{1}{2}\mathscr{M}\mathfrak{H}$。板的磁矩由 s 层表面上的电流所产生。当磁感应的切向分量从H突变到0时，面电流密度为 $g=\pm\frac{cH}{4\pi}$。因此，在 z 軸的单位长度上，在 s 层的每一边界面上的磁矩为

$$-\int\limits_{OCD}\frac{H}{4\pi}y\,ds\ \left(ds=\sqrt{dx^2+dy^2}\right).$$

如果层不伸出到表面，则 OC 段不存在，而在 CD 上，处处 $y=Y$。因此，四个角中每一角的多余磁矩等于

$$-\int\limits_{OCD}\frac{H}{4\pi}y\,ds+\int\limits_0^\infty\frac{H_{临界}}{4\pi}Y\,dx.$$

相应地多余的能量为

$$\mathscr{P}_3=-\frac{\mathfrak{H}}{2}\frac{4}{a}\left[\int\limits_0^\infty\frac{H_{临界}}{4\pi}Y\,dx-\int\limits_{OCD}\frac{H}{4\pi}y\,ds\right]=$$

$$=\frac{\mathfrak{H}}{2a\pi}\left[H_{临界}\int\limits_{CD}(-Y\,dx+y\,ds)+\int\limits_{OC}H_y\,dy\right].$$

用ξ表示的坐标 x 和 y 与 a 成正比。因此，$\mathscr{P}_1+\mathscr{P}_2$ 内的全部积分与 a^2 成正比，于是这部分热力学势与 a 成正比。因而 $\mathscr{P}_1+\mathscr{P}_2+\mathscr{P}_3$ 之和为①

$$\mathscr{P}=\frac{H^2_{临界}}{4\pi}\left[\frac{l\Delta}{a}+af(h)\right].$$

由上式取极小值的条件得出

$$a=\sqrt{\frac{l\Delta}{f(h)}}.$$

应該指出，在板面附近的 n 层內，磁場可以比 $H_{临界}$ 小得多，即存在相当于图22, a 所示的情况。在现在的情况下，它在热力学上的不利，可由阻止层厚度进一步减小的表面張力能来抵銷。

---

① $\mathscr{P}_2$ 和 $\mathscr{P}_3$ 內的积分不能用基本函数来表示，函数 $f(h)$在 E. 栗弗席兹和Ю. 沙尔維的論文內已列成表(参閱 247 頁上的底注)。

第七章　准靜态电磁場

§45. 傅科电流

到目前为止，我們只是研究了恒定电場和恒定磁場，而应用麦克斯韦方程

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{45.1}$$

只是出于附带的目的，即推导磁場能量的表达式(§30)。

物质內的交变电磁場的特征，主要决定于物质的种类和場頻率的数量級。在本节內，我們来研究在外加交变磁場內的大导体內所发生的現象。这时我們假定，場的变化速度不很大，而且滿足下面所提出的一系列条件。滿足这些条件的电磁場和电流，称为准靜态的。

首先我們假定对应于(眞空內或导体周圍媒质內)場頻率ω的波长 $\lambda\sim\frac{c}{\omega}$大于导体的綫度 l:

$$\omega \ll \frac{c}{l}.$$

于是在任何时刻，描写导体外的磁場分布可利用靜磁場方程：

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B}=0, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H}=0, \tag{45.2}$$

其中略去了由于电磁扰动傳播速度有限所引起的各种效应。不言而喻，只在离导体不大的距离(小于 λ)內，才容許这种忽略(这在任何情况下对确定导体內的場是完全足够的)。

导体內的完全場方程組包括(45.1)式和下列方程[①]:

---

① 在各向异性物体內，在(45.4)式右側，代替$\sigma\mathbf{E}$，应为具有分量$\sigma_{ik}E_k$的矢量。

$$\operatorname{div} \mathbf{B}=0, \tag{45.3}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\sigma \mathbf{E}. \tag{45.4}$$

严格說来，其中第二式只是对恒定电流和恒定磁場而引进的。因此，还必須指出能够相当精确地应用这方程于交变場的条件。在(45.4)式內，电流与电場强度的关系由关系式 $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ 得出，其中 σ 为常数，属于静态情况。如果場的变化周期大于微观导电机构的特征时間，即存在这种关系。換句話說，場的頻率必須小于导体內电子自由路程时間的倒数。对典型的金属而言(在室溫下)，这条件所容許的临界頻率，在光譜的紅外区域內[1]。

但是除此以外，在現在的情况下还有另一个条件限制着場方程的应用。因为这些方程是宏观方程，因而假定了电子的自由路程长度小于場发生显著变化的距离。下面我們将再討論这一条件。

在(45.1)和(45.4)式內，$\mathbf{E}$ 是由交变磁場所引起的感应电場强度。如果已知 $\mathbf{H}$，則由(45.4)式可直接求出場 $\mathbf{E}$。从(45.1)和(45.4)式內消去 $\mathbf{E}$，得到 $\mathbf{H}$ 的方程为

$$\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=-\operatorname{rot}\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{\sigma}. \tag{45.5}$$

在电导率 σ 和磁导率 μ 为常数的均匀媒质內，可以将因子 $\frac{1}{\sigma}$ 从符号 rot 內取出，而按照(45.3)式，我們有 $\operatorname{div}\mathbf{B}=\mu\operatorname{div}\mathbf{H}=0$。因此，$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}=-\Delta\mathbf{H}$，于是我們得到方程：

---

[1] 对于不良导体(例如半导体)，(45.4)式的应用还要求遵守另一个条件，它甚至是更强的条件。在这种导体內，同时引进电导率和介电常数是有意义的。于是在(45.4)式的右側，应添上一項 $-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$，它比 $\frac{4\pi}{c}\sigma E$ 小的条件为 $\frac{\sigma}{\omega}\gg\varepsilon$。在良导体內(金屬)，在电导率仍可假定为常数全部頻率区域內，实际上 $\frac{\sigma}{\omega}\gg1$(参閱260頁上的底注)。

$$\Delta \mathbf{H}=\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{45.6}$$

这个方程和方程 $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ 构成了确定磁場的完全方程組。应該指出，(45.6)式具有导热方程的形式，而且 $\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}$ 起着测温系数 χ 的作用。

在导体表面上，磁場的边界条件可从方程本身的形状明显看出，和前面一样，这些边界条件为

$$B_{n1}=B_{n2},\quad \mathbf{H}_{t1}=\mathbf{H}_{t2}. \tag{45.7}$$

(45.4)右側的表达式，由于它本身的局限性，并不影响其中的第二个条件。当 $\mu=1$ 时，可以簡单地写为①

$$\mathbf{H}_1=\mathbf{H}_2. \tag{45.8}$$

$\mathbf{H}_t$ 为連續的条件导至 $(\operatorname{rot}\mathbf{H})_n$ 也是連續的，而且按照(45.4)式，导至 $(\sigma\mathbf{E})_n$ 也是連續的。但在导体外，$\sigma=0$，因此我們得到結論，在导体表面上，

$$E_n^{(i)}=0,$$

式中的上角标 (i) 系指导体內的場而言。和 E_n 一样，$j_n=\sigma E_n$ 也变为零。由此可見，我們所研究的方程組自动地使电流密度的法向分量变为零(在导体表面上)。換句話說，在所考慮的近似內，交变磁場的存在，并不会引起导体表面上出現自由电荷。

如果导体是复合导体，而且它的各段的电导率不相同，則仅由(45.8)式的边界条件，并不足以对問題作出完全的表述。在两段导体的分界面上，除了 $\mathbf{H}$ 为連續外，还必須考慮到 $\mathbf{E}_t$ 的連續性条

① 对于通常的抗磁体或順磁体，μ 非常接近于1，在下面的公式內計入 μ，对精确度的提高沒有意义。与1相差很大的 μ 值，出現在铁磁金屬內，描写这种金屬的磁性质(在很弱的場內)是利用式的磁导率。但是在这些物质內，μ 的色散(μ 对頻率 ω 的依賴关系)出現很早，从而使 μ 实际上減小到1。由于这一情况，在本章各节內，我們假定 $\mu=1$。

件；对磁場而言，这个条件表明

$$\frac{(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_{t1}}{\sigma_1}=\frac{(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_{t2}}{\sigma_2}. \tag{45.9}$$

建立了基本方程后，我們进而来研究它們所描写的交变場的特征。

假定导体是在某一时刻已移去了場源的磁場內。这时导体內的以及导体周圍的場并不是立刻变为零，場随时間的衰减过程由(45.6)式决定。要求出这种問題的解，仿照数学物理中的普遍方法，必須按下列方式进行。我們求出(45.6)式的解为

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_m(x,y,z)e^{-\gamma_m t},$$

其中 γ_m 为常数。对于函数 $\mathbf{H}_m(x,y,z)$，得到方程

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}_m=-\gamma_m\mathbf{H}_m. \tag{45.10}$$

在給定的导体形状下，这些方程只对 γ_m 的一定值有不为零的解(滿足必要的边界条件)，这些 γ_m 值构成(45.10)式的“本征值”。全部 γ_m 值均为实正值①，而与它們对应的函数 $\mathbf{H}_m(x,y,z)$，則組成相互正交的完全的矢量函数組。設在起始时刻的場分布为函数 $\mathbf{H}_0(x,y,z)$所給出。把它按函数組 $\mathbf{H}_m$ 展开：

$$\mathbf{H}_0(x,y,z)=\sum_m c_m\mathbf{H}_m(x,y,z),$$

于是我們得到問題的解为

---

① 这点由下列方法容易证明。为了避免必須計及导体表面的边界条件，我們从(45.5)式出发，其中可以假定，在导体外，σ 以連續方式趋近于零，在方程

$$-\frac{4\pi}{c^2}\gamma_m\mathbf{H}_m=-\mathrm{rot}\,\frac{\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_m}{\sigma}$$

的两側乘上 $\mathbf{H}_m^*$，并对整个空間进行积分，我們得到

$$\frac{4\pi}{c^2}\gamma_m\int|\mathbf{H}_m|^2dV=\int\mathbf{H}_m^*\mathrm{rot}\,\frac{\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_m}{\sigma}dV=\int\frac{1}{\sigma}|\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_m|^2dV,$$

由此可以看出，γ_m 取实正值。

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \sum_m c_m e^{-\gamma_m t} \mathbf{H}_m(x, y, z), \qquad (45.11)$$

这个解給出場随时間的衰减方式。

場的衰减速度主要由上述和数中相应于 γ_m 的最小值的項决定；設这个最小值为 γ_1。于是場的“衰减时間”可定义为 $\tau = \frac{1}{\gamma_1}$。从(45.10)式可以看出这一时間的数量級。因为 $\Delta\mathbf{H} \sim \frac{\mathbf{H}}{l^2}$(其中 l 为导体的綫度)，因此，

$$\tau \sim \frac{4\pi\sigma l^2}{c^2}. \qquad (45.12)$$

另一类問題是导体在頻率为 ω 的外加交变磁場内的行为問题。透入导体内的磁場在导体内感生出交变电場，而这电場又引起电流的出現(称为傅科电流)。从上面所指出的方程(45.6)与导热方程的相似性出发，对于磁場透入导体内部的特征，可以得到一般的概念。从导热理論得知，满足这个方程的量，在时間 t 内在空間中“傳播”的距离約为 $\sqrt{\chi t}$。因此，我們可以立即得出結論，磁場“透入”导体内的距离 δ 的数量級为

$$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{\sigma\omega}}.$$

当然对由它所感生的电場和电流而言，情况也是一样。

在頻率为 ω 的交变場内，全部量对时間的关系由因子 $e^{-i\omega t}$ 給出。这时(45.6)式的形式变为

$$\Delta\mathbf{H} = -\frac{4\pi i\sigma\omega}{c^2}\mathbf{H}. \qquad (45.13)$$

我們来研究两种极限情况。如果“透入深度” δ 大于导体的綫度(頻率很小)，則在第一近似下，可以令(45.13)式的右侧为零。于是，在任何时刻的磁場分布，将和离导体很远处的外磁場保持給定值时的稳定情况的場分布完全相同。我們把这个解表示为 $\mathbf{H}_{稳定}$;

这解与頻率无关(更精确一点說，頻率只包含在时間因子 $e^{-i\omega t}$ 內)。于是，只在 ω 的下一級近似下，才出現感生电場，因为在稳定情况下，这种感生电場一般不存在。这相应于下列事实：按照(45.4)式从 $\mathbf{H}_{稳定}$ 計算$\mathbf{E}$时，我們得到零，因为 $\operatorname{rot}\mathbf{H}_{稳定}=0$。因此，要算出 $\mathbf{E}$，必須应用(45.1)式，按照这个式子，

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}_{稳定}. \tag{45.14}$$

于是这个方程和方程 $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$[当 σ 在导体內不变时，由(45.4)式得出]就完全确定了电場的分布。应該指出，它与頻率 ω 成正比。

現在轉到相反的极限情况：$\delta\ll l$(頻率很大)。本节开头所提到的宏观場方程的应用条件，要求 δ 必須大于傳导电子的自由路程长度①。

当 $\delta\ll l$ 时，磁場只能透入导体很薄的表面层內。在計算导体外的場时可以略去这层的厚度，也即是可以假定磁場一般不会透入导体內部。在这种意义上，高頻磁場內的导体，其行为和恒定場內的超导体相同，而要計算出超导体外的場，必須解相同形状的超导体的相应的稳定問題。

如果把导体面的各小区域看作平面，就可以在普遍形式下研究导体表面层內实际的場分布。于是必須对平面所包圍的导电媒质，求出(45.13)式的解，在平面外的場具有給定值，我們用$\mathbf{H}_0e^{-i\omega t}$表示它。如上面所示，由对半无限媒质求出这問題的解，就可以得到这一矢量，这个矢量与导体面平行。由于边界条件(45.8)，导体表面的磁場也等于 $\mathbf{H}_0e^{-i\omega t}$。

选擇导体面为 xy 平面，而且导电媒质充满一半空間 $z>0$。由

① 在金屬內，实际上正是这个条件最先被破坏(当頻率增加时)。条件 $\omega\ll\frac{1}{\tau}$ 对于电导率小的半导体，是一个更强的条件，其中 τ 是自由路程时間。

于問題的条件对于方向 x 和 y 是齐次的，因而所求的磁場 $\mathbf{H}$ 只依賴于 z 坐标(和时間)。所以我們得到 $\operatorname{div}\mathbf{H}=\frac{\partial H_z}{\partial z}=0$，因为在边界上 $H_z=0$，因而处处 $H_z=0$。按照(45.13)式，我們得到 $\mathbf{H}$ 的方程为

$$\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial z^2}+k^2\mathbf{H}=0,$$

式中

$$k=\sqrt{\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}i}=\frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c}(1+i).$$

这个方程的解在离导体面很远处 $(z\to\infty)$ 变为零，它与 e^{ikz} 成正比。

再考虑到 $z=0$ 时的边界条件，我們得到

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0e^{-\frac{z}{\delta}}e^{i\left(\frac{z}{\delta}-\omega t\right)}, \tag{45.15}$$

式中“透入深度”δ 定义为

$$\delta=\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}},\quad k=\frac{1+i}{\delta}. \tag{45.16}$$

現在利用(45.4)式求出电場。引进 z 方向的单位矢量 $\mathbf{n}$，我們得到

$$\mathbf{E}=\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}(1-i)[\mathbf{Hn}]. \tag{45.17}$$

注意到 $E\sim\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)H$

如果磁場 $\mathbf{H}_0e^{-i\omega t}$ 是“綫极化的”，則由适当选擇时間的計算原点，可以使 $\mathbf{H}_0$ 为实値。然后，我們选擇这矢量的方向为 y 軸方向。取(45.16)和(45.17)式的实数部分，我們得到

$$\begin{aligned}H_y=H&=H_0e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\frac{z}{\delta}-\omega t\right),\\E_x=E&=H_0\sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}}e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\frac{z}{\delta}-\omega t-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned} \tag{45.18}$$

于是傅科电流密度 $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ 的分布定律和电場的相同。

傅科电流的发生，引起場能量的耗散，它以焦耳热的形式放出来。在1秒內导体內所耗散的平均(对时間而言)能量 Q 等于

$$Q=\int\overline{\mathbf{jE}}\,dV=\int\sigma\overline{E^2}\,dV.$$

也可以作为1秒內从外部流入导体內的平均場能来算出 Q，也即是积分：

$$Q=\oint\overline{\mathbf{S}}d\mathbf{f}=\frac{c}{4\pi}\int[\overline{\mathbf{EH}}]d\mathbf{f},\tag{45.19}$$

这积分对导体的表面进行①。

我們从上面看到，在 $\delta\gg l$ 的极限情况下，导体內的磁場的振幅与频率无关，而电場的振幅則与 ω 成正比。因此，在小频率时，耗散能量 Q 与 ω^2 成正比。

在 $\delta\ll l$ 的情况下，导体表面的磁場和电場，由(45.15)式和(45.17)式求出，其中 $z=0$。坡印廷矢量垂直于导体表面，而它的平均值为

$$\mathbf{S}=\frac{c}{16\pi}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}|\mathbf{H}_0|^2,$$

而且如上面所指出的，$\mathbf{H}_0$ 沿导体表面的变化，可以由解相同形状

---

① 如果把任何两个量 $a(t)$ 和 $b(t)$ 写成复数形式(与 $e^{-i\omega t}$ 成正比)，則在計算它們的乘积时，首先当然必須取实值部份。但是，如果我們感兴趣的只是这乘积的平均值(对时間取平均)，則可以算出为

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{ab^*\}.$$

实际上，含有因子 $e^{\pm 2i\omega t}$ 的項在平均后变为零，因此得

$$\frac{1}{4}\overline{(a+a^*)(b+b^*)}=\frac{1}{4}(ab^*+a^*b).$$

特别是，按照下式

$$\overline{\mathbf{S}}=\mathrm{Re}\left\{\frac{c}{4\pi}\frac{1}{2}[\mathbf{EH}^*]\right\}.\tag{45.19a}$$

可以算出 $\overline{\mathbf{S}}$ 为“坡印廷复数矢量”的实值部分。

的超导体外的磁場問題求出。能量耗散为

$$Q=\frac{c}{16\pi}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}\oint|\mathbf{H}_0|^2df. \tag{45.20}$$

注意到，当高频率时，Q 与$\sqrt{\omega}$成正比。

能量耗散也可以用导体在磁場內所得到的总磁矩 $\mathscr{M}$ 来表示。在周期場內，磁矩也是頻率相同的时間的周期函数。按照(3.14)式，导体自由能隨时間的变化由下列导数得出：

$$-\mathscr{M}\frac{d\mathfrak{H}}{dt},$$

式中 $\mathfrak{H}$ 是导体所在的外均匀磁場。

从这个式子还不能直接給出所求的能量耗散，因为导体的能量改变，不但由于耗散作用，而且也由于导体与周圍場之間的周期性的能量轉移。如果我們对时間求平均值，則后一部分为零，由此可見，单位时間內的平均能量耗散为

$$Q=-\overline{\mathscr{M}\frac{d\mathfrak{H}}{dt}}. \tag{45.21}$$

如果将 $\mathscr{M}$ 和 $\mathfrak{H}$ 写为复数形式，則 $\dot{\mathfrak{H}}=-i\omega\mathfrak{H}$，而 Q 可以算出为

$$Q=-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{i\omega\mathscr{M}\mathfrak{H}^*\}=\frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\{\mathscr{M}\mathfrak{H}^*\} \tag{45.22}$$

(关于这里出現的因子$\frac{1}{2}$，参閱 262 頁上的底注)。

磁矩$\mathscr{M}$的分量是外磁場的綫性函数：

$$\mathscr{M}_i=V\alpha_{ik}\mathfrak{H}_k, \tag{45.23}$$

式中无量綱系数 $\alpha_{ik}(\omega)$决定于导体的形状和它在外場中的取向(但与它的体积V无关)；假定这个式子內的$\mathscr{M}$和 $\mathfrak{H}$ 写为复数形式，于是量α_{ik}一般說来也是复数。張量 $V\alpha_{ik}$ 可以称为整个导体的磁极化率張量。下面将证明(§ 88)，这張量是对称的：

$$\alpha_{ik}=\alpha_{ki}. \tag{45.24}$$

利用这一性质，可以写为

$$\mathscr{M}\mathfrak{H}^* = V\alpha_{ik}\mathfrak{H}_i^*\mathfrak{H}_k = \frac{V}{2}\alpha_{ik}(\mathfrak{H}_i^*\mathfrak{H}_k + \mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*) =$$

$$= V\alpha_{ik}\mathrm{Re}\{\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*\}.$$

此外，如果把复数量 α_{ik} 写为

$$\alpha_{ik} = \alpha'_{ik} + i\alpha''_{ik},$$

則对于耗散能量(45.22)，我們得到

$$Q = \frac{V}{2}\omega\alpha''_{ik}\mathrm{Re}\{\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*\}. \tag{45.25}$$

由此可見，能量耗散由物体磁极化率的虛数部分决定。我們从上面已看到，当頻率低时，Q 与 ω^2 成正比，而頻率高时則与$\sqrt{\omega}$ 成正比。因此，可以作出結論，在这两种极限情况下，量 α''_{ik} 分別与 ω 和 $\omega^{-\frac{1}{2}}$ 成正比。当 $\omega\to 0$ 或 $\omega\to\infty$ 时，α''_{ik} 都减少，因而在中間区域內必有一极大值。

在交变磁場內，导体的磁矩主要是由于导体內的傳导电流所产生的；甚至当 $\mu=1$，靜磁矩变为零时，它也不为零。取 $\omega\to 0$ 的极限，于是后者可从 $\mathscr{M}(\omega)$ 得到。由此得出，磁极化率的实値部分 α'_{ik}，当 $\omega\to 0$ 时，趋近于定値($\mu=1$ 时趋于零)，这定値相应于恒定磁場內的磁化强度。在 $\omega\to\infty$ 的极限情况下，这时磁場不透入导体內部，于是量 α'_{ik} 趋近于另一极限値，相应于相同形状的超导体的靜磁化强度。

例 題

1. 試求均匀的周期的外磁場內半徑为 a 的各向同性导电球的磁极化率。

解：球內的磁場 $\mathbf{H}^{(i)}$ 滿足方程：

$$\Delta\mathbf{H}^{(i)} + k^2\mathbf{H}^{(i)} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{H}^{(i)} = 0$$

$$\left(k = \frac{1+i}{\delta}\right).$$

我們把这場写为 $\mathbf{H}^{(i)}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$，同时 $\mathbf{A}$ 滿足方程 $\Delta\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=0$；因为 $\mathbf{H}$ 是軸矢量，因而 $\mathbf{A}$ 是极矢量。由于球是对称的，于是唯一与解有关的恒定矢量是外磁場的强度 $\mathfrak{H}$。我們用 f 表示标量方程：$\Delta f+k^2f=0$ 的球对称的解：

$$f=\frac{\sin kr}{r}.$$

于是滿足矢量方程 $\Delta\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=0$、而且与恒定軸矢量 $\mathfrak{H}$ 为綫性关系的极矢量 $\mathbf{A}$，可以写为

$$\mathbf{A}=\beta\,\mathrm{rot}(f\mathfrak{H})$$

（β 为常数）。由此可見，求得 $\mathbf{H}^{(i)}$ 的形式为

$$\mathbf{H}^{(i)}=\beta\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(f\mathfrak{H})=$$
$$=\beta\left(\frac{f'}{r}+k^2f\right)\mathfrak{H}-\beta\left(\frac{3f'}{r}+k^2f\right)\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathfrak{H}),$$

式中 $\mathbf{n}$ 是 $\mathbf{r}$ 方向的单位矢量（利用方程 $\Delta f+k^2f=0$，二次导数 f'' 被消去）。

球外的磁場 $\mathbf{H}^{(e)}$ 滿足方程 $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}^{(e)}=0$ 和 $\mathrm{div}\,\mathbf{H}^{(e)}=0$。我們把它写为 $\mathbf{H}^{(e)}=-\mathrm{grad}\,\varphi+\mathfrak{H}$，而且 φ 滿足方程 $\Delta\varphi=0$，但在无窮远处变为零。这函数 φ 与恒定矢量 $\mathfrak{H}$ 为綫性相依，其形式为

$$\varphi=-\alpha V\mathfrak{H}\nabla\frac{1}{r}$$

$\left(V=\frac{4\pi a^3}{3}\right)$。由此可見，求得 $\mathbf{H}^{(e)}$ 的形式为

$$\mathbf{H}^{(e)}=V\alpha\,\mathrm{grad}\left(\mathfrak{H}\nabla\frac{1}{r}\right)+\mathfrak{H}=\frac{V\alpha}{r^3}[3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathfrak{H})-\mathfrak{H}]+\mathfrak{H}.$$

显然地，$\alpha V\mathfrak{H}$ 是球的磁矩，于是 $V\alpha$ 是球的磁极化率（由于球的对称性，張量 α_{ik} 变成标量 $\alpha_{ik}=\alpha\delta_{ik}$）。

在球面上（$r=a$），$\mathbf{H}$ 的全部分量为連續的。分別令与 $\mathbf{n}$ 平行和垂直的各分量相等，我們就可得到确定 α 和 β 的两个方程。对于我們感兴趣的磁极化率（屬于单位体积），得到

$$\alpha=\alpha'+i\alpha''=-\frac{3}{8\pi}\left[1-\frac{3}{a^2k^2}+\frac{3}{ak}\mathrm{ctg}\,ak\right],$$

$$\alpha'=-\frac{3}{8\pi}\left[1-\frac{3}{2}\frac{\delta}{a}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{2a}{\delta}\right)-\sin\left(\frac{2a}{\delta}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{2a}{\delta}\right)-\cos\left(\frac{2a}{\delta}\right)}\right],$$

$$\alpha''=-\frac{9\delta^2}{16\pi a^2}\left[1-\frac{a}{\delta}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2a}{\delta}\right)+\sin\left(\frac{2a}{\delta}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2a}{\delta}\right)-\cos\left(\frac{2a}{\delta}\right)}\right].$$

在小频率的极限情况下($\delta\gg a$),

$$\alpha'=-\frac{1}{105\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4=-\frac{4\pi}{105}\frac{a^4\sigma^2\omega^2}{c^4},$$

$$\alpha''=\frac{1}{20\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2=\frac{a^2\sigma\omega}{10c^2}.$$

对于频率很高的情况($\delta\ll a$),

$$\alpha'=-\frac{3}{8\pi}\left[1-\frac{3\delta}{2a}\right]=-\frac{3}{8\pi}\left[1-\frac{3c}{2a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}\right],$$

$$\alpha''=\frac{9}{16\pi}\frac{\delta}{a}=\frac{9c}{16\pi a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}.$$

极限值 $V\alpha'=-\frac{a^3}{2}$相应于超导球的磁矩,而 α'' 的值借助于(45.20)式,利用超导球表面的磁場公式(42.3),即可求得。

2. 与上題相同,試求导电柱体(半徑为 a)在与其軸垂直的均匀周期外磁場內的磁极化率。

解. 这个問題是例題 1 的"二維类似";下面的全部矢算是在垂直于柱体軸的平面內的二維运算,而 $\mathbf{r}$ 是这平面內的徑向矢量。柱体內的磁場为

$$\mathbf{H}^{(i)}=\beta\operatorname{rot}\operatorname{rot}(f\mathfrak{H})=$$
$$=\beta\left(\frac{f'}{r}+k^2f\right)\mathfrak{H}-\beta\left(\frac{2f'}{r}+k^2f\right)\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathfrak{H}),$$

式中 $f=J_0(kr)$是二維方程 $\Delta f+k^2f=0$ 的对称解,它在 $r=0$ 时取有限值。柱体外的場为

$$\mathbf{H}^{(e)}=-2\alpha V\operatorname{grad}(\mathfrak{H}\nabla\ln r)+\mathfrak{H}$$
$$=\frac{2\alpha V}{r^2}[2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathfrak{H})-\mathfrak{H}]+\mathfrak{H}$$

($V=\pi a^2$)。柱体单位长度的磁矩为 $V\alpha\mathfrak{H}$(參閱 § 3 例題2)。和例題 1 一样,当 $r=a$ 时,从条件 $\mathbf{H}^{(i)}=\mathbf{H}^{(e)}$,我們得到

$$\alpha=-\frac{1}{2\pi}\left[1-\frac{2}{ak}\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right]$$

[此处利用了关系式 $J_0'(kr)=-kJ_1(kr)$]。

当 $\delta \gg a$ 时，按 ka 幂展开貝塞耳函数，我們得到

$$\alpha' = -\frac{1}{24\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 = -\frac{\pi a^4\sigma^2\omega^2}{6c^4},$$

$$\alpha'' = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 = \frac{a^2\sigma\omega}{4c^2}.$$

当 $\delta \ll a$ 时，利用貝塞耳函数的漸近表达式，我們得到

$$\alpha' = -\frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{\delta}{a}\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{c}{a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}\right),$$

$$\alpha'' = \frac{1}{2\pi}\frac{\delta}{a} = \frac{c}{2\pi a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}.$$

3. 所求与上題相同，但磁場与柱体軸平行。

解. 在整个空間內，磁場与柱体軸平行。在柱体外，$\mathbf{H}^{(e)} = \mathfrak{H}$，而在柱体內，$\mathbf{H}^{(i)} = f\mathfrak{H}$，式中 f 是二維方程 $\Delta f + k^2 f = 0$ 的对称解，当 $r = a$ 时这解变为 1：

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathfrak{H}\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}.$$

柱体內的傅科电流是环流的（即在柱坐标系中，$\mathbf{j}$ 只有分量 j_φ），按照

$$\frac{4\pi j}{c} = -\frac{\partial H}{\partial r},$$

从 $H_z = H$，可以求得傅科电流的值。柱体单位长度的磁矩 $\mathscr{M} = \pi a^2 \alpha\mathfrak{H}$ 是由傅导电流所产生的，其方向与柱体軸平行，并且等于

$$\mathscr{M} = \frac{1}{2c}\int jr dV = -\frac{1}{4}\int \frac{\partial H}{\partial r} r^2 dr.$$

計算积分后，我們得到

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi}\left[1 - \frac{2}{ka}\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right].$$

由此可見，柱体的纵向极化率只有例題 2 所求出的横向极化率的二分之一。

4. 試求导体球內磁場衰減系数中的最小值。

解. 球导体的(45.10)式的解中，包含不同对称性的函数。其中最对称性的解是由任意恒定标量所定义的解。但是由于下列原因，它不可能存在。因为这种解是球对称的：$H = H_r(r)$，而且由于方程 $\operatorname{div}\mathbf{H} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH) = 0$（这式子无論在球內或球外都正确），因而 $H = \frac{\text{常数}}{r}$。但是，这函数不滿足在球中

心上为有限的条件。

γ 的最小值相应于由任意恒定矢量所定义的解之一。显然，这些解的形式与例题 1 內所得到的相同，所不同的只是，在 $\mathbf{H}^{(e)}$ 場內，必須略去常数項，因为在无穷远处，必須 $\mathbf{H}=0$。这时 k 是实数量$\left(k^2=\frac{4\pi\sigma\gamma}{c^2}\right)$，而矢量 $\mathfrak{H}$ 为任意的恒定矢量。当 $r=a$ 时，从边界条件 $\mathbf{H}^{(i)}=\mathbf{H}^{(e)}$，我們得到二个方程，从其中消去 α 和 β 后，得到 $\sin ka=0$。这个方程不为零的最小根是 $ka=\pi$，于是 γ 的最小值为

$$\gamma=\frac{\pi c^2}{4\sigma a^2}.$$

§46. 趋肤效应

我們現在来研究导体內流过不为零的总交变电流时，电流密度在导体截面上的分布。根据前一节內所得到的結果，我們可以預料到，当頻率增加时，电流将主要集中在导体表面附近。这种現象称为**趋肤效应**。

精确地求解趋肤效应問題，一般說来，不但依賴于导体的形状，而且也依賴于导体內电流的激发方式，也即是依賴于产生感应电流的外加交变磁場的特性。但是一种重要的情况是假定电流的分布与电流的激发方式无关。这就是导綫粗度小于其长度的細导綫內的电流。

計算細导綫截面上的电流分布，可以假定細导綫为直綫。这时电場与导綫軸平行，而磁場矢量 $\mathbf{H}$ 在与軸垂直的平面內。

我們研究圓截面的导綫。这种情况特别簡单，因为导綫外的場形式可以預先知道。实际上，由于导体表面上的对称性，$\mathbf{E}=$ 常数(在任何給定时刻)。但是在这种边界条件下，在导綫外的空間內，方程 $\operatorname{div}\mathbf{E}=0, \operatorname{rot}\mathbf{E}=0$ 在整个空間內只有一个解：$\mathbf{E}=$ 常数。根据类似的原因，导綫周圍的磁場，将和流过的恒定电流等于交变电流瞬时值时的导綫周圍的磁場相同。

在导綫內，电場滿足方程：

$$\Delta\mathbf{E}=\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},$$

这个方程和 **H** 的方程(45.6)相同[我們从(45.1)和(45.4)式內消去**H**，即可得到这个方程，和由消去 **E** 得到方程(45.6)一样]。在 z 軸为导綫軸的柱面坐标系內，場 **E** 只有 z 分量，而且只依賴于坐标 r。对于頻率为 ω 的周期場，我們得到方程：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right)+k^2E=0,\quad k=\frac{\sqrt{2i}}{\delta}=\frac{1+i}{\delta},\tag{46.1}$$

式中 δ 是前一节內引入的"透入深度"(45.16)。这方程的解在 $r=$ $=0$ 处为有限，这解为

$$E=E_z=\text{常数}\cdot J_0(kr)e^{-i\omega t}\tag{46.2}$$

(J_0 是貝塞耳函数)。电流密度 $j=\sigma E$ 按相同的定律分布。

按照(45.1)式，从电場求得磁場 $H_\varphi=H$ 为

$$\frac{i\omega}{c}H_\varphi=(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_\varphi=-\frac{\partial E_z}{\partial r}.\tag{46.3}$$

注意到 $J_0'(u)=-J_1(u)$，我們得到

$$H=H_\varphi=-i\cdot\text{常数}\cdot\sqrt{\frac{4\pi\sigma i}{\omega}}J_1(kr)e^{-i\omega t}\tag{46.4}$$

其中的常数和(46.2)內的相同。在导体表面上必須 $H=\frac{2I}{ca}$，由这一条件可以很容易地定出这一常数，式中 a 是导綫的半徑，而 I 为流过导綫的总电流。

在頻率很低的极限情况下$\left(\frac{a}{\delta}\ll 1\right)$，在导綫的整个截面上，可以只取貝塞耳函数展开式的头几項：

$$\begin{aligned}E_z&=\text{常数}\cdot\left[1-\frac{i}{2}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\right]e^{-i\omega t},\\H_\varphi&=\text{常数}\cdot\frac{2\pi\sigma}{c}r\left[1-\frac{i}{4}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2-\frac{1}{48}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\right]e^{-i\omega t}.\end{aligned}\tag{46.5}$$

E 的振幅和电流密度的振幅，随远离导綫軸与$\left[1+\left(\frac{r}{2\delta}\right)^4\right]$成正比地增加。

在相反的高频率的极限情况下$\left(\frac{a}{\delta}\gg 1\right)$，在大部分的导綫截面上，可以利用熟知的漸近式：

$$J_0(u\sqrt{2i})\sim\frac{1}{\sqrt{u}}e^{(1-i)u},\tag{46.6}$$

这个式子当貝塞耳函数的宗量为大值时可以应用。只保留变化得最快的指数因子，我們得到

$$\begin{aligned}E_z&=\text{常数}\cdot e^{-\frac{a-r}{\delta}}e^{i\left(\frac{a-r}{\delta}-\omega t\right)},\\ H_\varphi&=\text{常数}\cdot(1+i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}e^{-\frac{a-r}{\delta}}e^{i\left(\frac{a-r}{\delta}-\omega t\right)}.\end{aligned}\tag{46.7}$$

这些式子当然与(45.15)—(45.17)式相同，在强趋肤效应时，对任何形状的导体表面都能应用。

在导綫截面不为圓截面的普遍情况下，精确計算趋肤效应是一个非常复杂的問題，因为这时需要同时求出导綫內和导綫外的場。只有在强趋肤效应的极限情况下，問題才又得到簡化，因为这时导綫外的場可以定义为相同形状的超导体外的靜态場（§45）。

还应該注意到，在强趋肤效应的情况下，导体內的电流分布，不但在細导綫內，而且在任何粗度的导体內，都完全是单值的（不依賴电流的激发方式）。这从 §42 內所指出的超导体圓环內面电流分布的单值性，可以得知。

§47. 复数电阻

只要交变电流的頻率很低，綫性迴路內电流强度的瞬时值$J(t)$，就可由同一时刻的电动势的值 $\mathcal{E}(t)$求出：

$$\mathcal{E}(t)=RJ(t),\tag{47.1}$$

式中 R 是导綫对恒定电流的电阻。

但是,在任意的頻率下,我們沒有任何理由期望在同一时刻的 $\mathscr{E}$ 值和 J 值之間存在綫性关系。我們只能断言,在以前任何时刻內,$J(t)$ 值必須为 $\mathscr{E}(t)$ 值的綫性函数。这种綫性关系可用符号表示为 $J=\hat{Z}^{-1}\mathscr{E}$,或者写成逆关系式:

$$\mathscr{E}=\hat{Z}J, \tag{47.2}$$

式中 $\hat{Z}$ 为某一綫性算符①。如果将函数 $\mathscr{E}(t)$ 和 $J(t)$ 展开为傅里叶級数,則对于其中每一"单色"分量(与时間的关系由因子 $e^{-i\omega t}$ 表示),由于算符 $\hat{Z}$ 是綫性的,因而由算符 $\hat{Z}$ 作用的結果归結为乘上某一个量 Z,它与頻率值的关系为

$$\mathscr{E}=Z(\omega)J. \tag{47.3}$$

函数 $Z(\omega)$ 一般說来是复数,称为导体的**复数电阻**或**阻抗**。

由比較 (47.3) 与 (47.1) 式明显看出,通常的电阻 R 为函数 $Z(\omega)$ 展开为 ω 的冪級数內的零次项。要求出其次的一項,除了考慮到 R 外,还必須考慮到导体的自感 L②。

我們来研究接有交变电动势 $\mathscr{E}(t)$ 的綫性迴路。按照电动势的定义,1 秒內电場对导体內的运动电荷所作的功为 $\mathscr{E}J$。这功一部分轉变为焦耳热,一部分消耗于改变电流的磁能。按照 R 和 L 的定义,1 秒內导綫內放出的焦耳热为 RJ^2,而电流的磁能为 $\frac{LJ^2}{2c^2}$。因此,能量守恒定义可表示为

$$\mathscr{E}J=RJ^2+\frac{d}{dt}\frac{LJ^2}{2c^2}=RJ^2+\frac{1}{c^2}LJ\frac{dJ}{dt},$$

或

---

① 我們在这里不詳細地討論这算符的普遍性质,因为它們和将在 §§58 和 62 內詳細討論的 $\hat{\varepsilon}$ 的算符的性质完全相似。

② 在这里和以后,我們把 R 和 L 理解为对恒定电流而言的量。

$$\mathscr{E}=RJ+\frac{1}{c^2}L\frac{dJ}{dt}. \tag{47.4}$$

为了运用二項式$(\mathscr{E}J, J^2)$，必須把$\mathscr{E}$和J写成实函数形式。但是，在导出了綫性方程(47.4)以后，我們可以取复数形式的单色分量：$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0e^{-i\omega t}$，$J=J_0e^{-i\omega t}$。于是(47.4)式变成代数关系式：

$$\mathscr{E}=\left(R-\frac{i}{c^2}\omega L\right)J,$$

由此得

$$Z=R-\frac{i}{c^2}\omega L. \tag{47.5}$$

在关系式 $J=\frac{\mathscr{E}}{Z}$ 中取出实数部分，我們得到

$$J(t)=\frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2+\frac{\omega^2L^2}{c^4}}}\cos(\omega t-\varphi),\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega L}{c^2R} \tag{47.6}$$

由这个公式可以求出电流的振幅和电流与电动势間的相差。

(47.5)式的实数部分和决定电路內能量耗散的电阻R相同。容易看出，在$Z(\omega)$为任意关系的普遍情况下，在$\mathrm{Re}Z$和能量耗散之間存在类似的关系(保持电流强度不变)。

将迴路內維持周期电流所消耗的功率$\mathscr{E}J$对时間求平均值，我們就得到不断地补償耗散損失的那部分功率。于是，迴路中1秒內的能量耗散Q为

$$Q=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathscr{E}J^*\},$$

式中$\mathscr{E}$和J表示为复数形式(比較262頁上的底注)。将$\mathscr{E}=ZJ$代入，并分别将Z的实数部分和虛数部分表示为Z'和Z''①：

$$Z=Z'+iZ'', \tag{47.7}$$

① 有时称它們为有效电阻和电抗。

我們得到

$$Q=\frac{1}{2}Z'|J|^2$$

或者利用实函数 $J(t)$，

$$Q=Z'(\omega)\overline{J^2}, \tag{47.8}$$

由这个式子可得到所求的关系式。

应該注意，旣然 Q 为实在正值，因而 Z' 也总是正的：

$$Z'>0. \tag{47.9}$$

我們来計算任意频率[1]时圓截面导綫的 $Z(\omega)$，也即是这时不略去趋肤效应。为此，我們再利用写成另一种形式的能量守恒定律。

把功率 $\mathscr{E}J$（$\mathscr{E}$ 和 J 是实数式）分为两項，其中一項表示导綫外的磁場能的变化，而另一項表示导綫內所消耗的总能量（包括場能变化以及热量放出所消耗的能量）。第二部分可以計算为 1 秒內通过导体表面流入导体內的总能量流。由此可見，我們得到

$$J\mathscr{E}=\frac{d}{dt}\left(\frac{L_eJ^2}{2c^2}\right)+\frac{cEH}{4\pi}2\pi al=\frac{L_e}{c^2}J\frac{dJ}{dt}+\frac{1}{2}cEHal,$$

式中 L_e 是导綫自感的外部分，E 和 H 是导綫表面的电場强度和磁場强度，a 为导綫的半徑，l 为长度。磁場 H 与电流 J 的关系为 $H=\frac{2J}{ca}$。因此，用 J 除上面的等式，我們得到

$$\mathscr{E}=\frac{1}{c^2}L_e\frac{dJ}{dt}+El.$$

这个方程是綫性方程，因此，可以化为复数形式。于是

$$\mathscr{E}=ZJ=-\frac{i\omega L_e}{c^2}J+El,$$

由此得

[1] 但是，当然滿足准靜态的条件。

$$Z=-\frac{i\omega}{c^2}L_e+\frac{lE}{J}=-\frac{i\omega}{c^2}L_e+\frac{2El}{caH}. \tag{47.10}$$

在任意頻率时，必須代入(46.2)和(46.4)式內的E和H，于是得

$$Z=-\frac{i\omega}{c^2}L_e+R\frac{ak}{2}\frac{J_0(ak)}{J_1(ak)} \tag{47.11}$$

$\left(R=\frac{l}{\pi a^2\sigma}\right)$。在弱趋肤效应的情况下，我們利用展开式(46.5)，計算精确到$\left(\frac{a}{\delta}\right)^4$次的項，并取出实数部分，我們得到

$$Z'=R\left[1+\frac{1}{48}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4\right]=R\left[1+\frac{1}{12}\left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2}\right)^2\right]. \tag{47.11a}$$

相反地，在强趋肤效应的情况下，由(46.7)式，我們得到

$$Z'=R\frac{a}{2\delta}=\frac{l}{ca}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}},$$

$$Z''=-\frac{\omega}{c^2}\left[L_e+L_i\frac{2\delta}{a}\right]=-\frac{\omega}{c^2}\left[L_e+\frac{lc}{a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}\right]. \tag{47.12}$$

从(47.11a)式看出，当

$$\left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2}\right)^2\ll 12$$

时，可以假定$Z'=R$，同时

$$\frac{Z''}{Z'}=\frac{\omega L}{c^2R}=\left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2}\right)2\ln\frac{l}{a}$$

[L从(33.1)式得出]。与上面的不等式比較，我們看到，設在某頻率区域中可以利用(47.5)式而不必略去其中的自感，則这区域，依賴于比值$\frac{l}{a}$，而且是比較狹窄的。

但是实际上，最重要的情况是电路內自感的主要負載者为接入电路內的綫圈，这綫圈的自感比拉长导綫的自感大得多（参閱§33）。在这种电路內，可以应用(47.5)式[也即是(47.4)式，其中

R 和 L 为常数]的频率区域是相当寬的。

我們設外加交变磁場 $\mathbf{H}_e$ 可以用任何方式产生，来研究这磁場內的迴路。我們用 $\mathbf{E}_e$ 表示导体不存在时由交变磁場 $\mathbf{H}_e$ 所感生的电場。和 $\mathbf{H}_e$ 相同，在細导綫的粗度范圍內，$\mathbf{E}_e$ 的变化也很小(这与导綫內流过的电流的場相反)。因此，可以研究 $\mathbf{E}_e$ 沿电流迴路的循环，而不必表示出这迴路通过导綫內的精确位置。这种循环量即是外加交变磁場在迴路內所感生的电动势 $\mathscr{E}$。按照麦克斯韦方程的积分形式，我們有

$$\mathscr{E}=\oint \mathbf{E}_e\,d\mathbf{l}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}_e d\mathbf{f}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi_e}{dt}, \tag{47.13}$$

式中 Φ_e 是通过所研究迴路的外場的磁通量。把这表达式代入方程(47.4)，我們得到

$$RJ+\frac{1}{c^2}L\frac{dJ}{dt}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi_e}{dt}. \tag{47.14}$$

如果把含有自感的項移到等式右侧，則这方程可以写为

$$RJ=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi_e}{dt}-\frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt},$$

式中 $\Phi=\Phi_e+\frac{1}{c}LJ$，是外加磁場和电流的磁場的总磁通量。这种形式的方程表示全电路的欧姆定律，也即是表示在电路內 RJ 等于总电动势。

表示欧姆定律的(47.14)式的表述形式，也可以推广到电路形状随时間而变化的情况。这时自感 L 为时間的函数，而(47.14)式变为

$$RJ=-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(LJ)-\frac{1}{c}\frac{d\Phi_e}{dt}. \tag{47.15}$$

从能量守恒定律推导这个式子时，还必須考虑到导体发生形变时所消耗的功。

如果有若干个互相靠近的迴路，其中的电流为 J_a，則对每一迴路而言，(47.14)式中的 Φ_e 为其余各迴路(以及外磁場，如果存在的話)所产生的磁通量之和。由电流 J_b 所产生的通过电流为 J_a 的迴路的磁通量为 $L_{ab}\frac{J_b}{c}$，式中 L_{ab} 是两迴路的互感系数。因此，我們得到迴路內交变电流的方程組为

$$R_a J_a+\frac{1}{c}\sum_b L_{ab}\frac{dJ_b}{dt}=\mathscr{E}_a. \tag{47.16}$$

对 b 的求和包含自感項($b=a$)，而 $\mathscr{E}_a$ 为在电流系統外的場源在第 a 个迴路內所产生的电动势。

对周期电流(单色电流)而言，微分方程組(47.16)变为代数方程組:

$$\sum_b Z_{ab}J_b=\mathscr{E}_a, \tag{47.17}$$

式中量

$$Z_{ab}=\delta_{ab}R_a-\frac{i\omega}{c^2}L_{ab} \tag{47.18}$$

构成"阻抗矩陣"。和(47.5)式类似，(47.18)式代表函数 $Z_{ab}(\omega)$ 展开为频率的冪級数的头两項。

应該注意到，在这种近似下，不存在迴路对阻抗的实数部分的相互影响。这种影响的产生是由于一导体內的交变电流的磁場在另一导体內产生傅科电流，因而引起附加的能量耗散。对綫性导体，这种效应可忽略不計。但是在綫导体附近存在大导体时，这种效应就能察觉出来。

末了，我們来研究一个問題，即本节所得到的綫性迴路內交变电流的方程和任意导体內交变磁場的普遍方程的联系如何。我們从最簡单的例子来研究这种联系，即研究 $t=0$ 时移去了迴路內的

恒定电动势 $\mathscr{E}_0$ 所产生的电流。从(47. 4)式，我們有[①]

$$J=\frac{\mathscr{E}_0}{R} \quad \text{当 } t<0,$$
$$J=\frac{\mathscr{E}_0}{R}e^{-\frac{c^2R}{L}t} \quad \text{当 } t>0. \tag{47. 19}$$

我們看出，在电动势移去以后，电流按指数定律随时間而衰减，其衰减率为

$$\gamma=\frac{c^2R}{L}. \tag{47. 20}$$

从精确表述問題的观点看来，这个 γ 值是由解給定导体的精确方程(45. 10)所得到的 γ_m 值中的最小值。在綫性导体的 γ_m 值中，有一个最小值，其数量級比其余的值小 $\ln\left(\frac{l}{a}\right)$ 倍；这也就是(47. 20)的值。

§ 48. 准稳定态电流电路内的电容

交变电流和恒定电流不同，不但可以在閉合电路內流过，也可以在开电路內流过。我們来研究綫性迴路，这电路的两端和电容器的两板連接（两板間的距离很小）。迴路內有交变电流流过时，电容器的两板将周期性地充电和放电，同时起着开电路內电流的"发源点"和"汇合点"的作用。

由于电容器两板間的距离很小，因而和前面一样，可以令电流的磁能等于 $\frac{LJ^2}{2c^2}$，其中 L 是用一短导綫联接电容器的两板所得到的

① 严格說来，这些公式当 t 很小时不能应用，由于这时在函数的傅立叶展开式內，高频率项也很重要，因而不能利用(47.4)式。但是在很短的时間間隔內，电流 J 来不及显著改变，因而由(47.19)式可以相当精确地求出以后时刻的电流值。

閉合电路內的自感。但是应用能量守恒定律时，除了考虑磁能外，还必須考虑电容器內的电場能。后者等于$\frac{e^2}{2C}$，其中C为电容器的电容，而$\pm e(t)$是电容器两板上的电荷。和推导(47.4)式一样，我們得到①

$$\mathscr{E}J=RJ^2+\frac{d}{dt}\frac{LJ^2}{2c^2}+\frac{d}{dt}\frac{e^2}{2C}=RJ^2+\frac{1}{c^2}LJ\frac{dJ}{dt}+\frac{e}{C}\frac{de}{dt}.$$

但是电流强度J等于一板上电荷的减少率或另一板上电荷的增加率：

$$J=\frac{de}{dt}.$$

用J除前一方程的两側，并将其中的J用e表示，我們得到

$$\frac{1}{c^2}L\frac{d^2e}{dt^2}+R\frac{de}{dt}+\frac{e}{C}=\mathscr{E}. \tag{48.1}$$

这也就是所求的接有电容的电路內交变电流的方程。

如果$\mathscr{E}$是頻率为ω的时間的周期函数，則方程(48.1)变成$\mathscr{E}$与电荷e間的代数关系式，或者是$\mathscr{E}$与电流$J=-i\omega e$間的代数关系式。因此我們有$JZ=\mathscr{E}$，其中阻抗Z由下式决定：

$$Z=R-i\left(\frac{\omega L}{c^2}-\frac{1}{\omega C}\right). \tag{48.2}$$

从关系式$J=\frac{\mathscr{E}}{Z}$內取出实数部分，我們得到

$$J(t)=\frac{\mathscr{E}_0\cos(\omega t-\varphi)}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\omega L}{c^2}-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \tag{48.3}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\left(\frac{\omega L}{c^2}-\frac{1}{\omega C}\right)\frac{1}{R},$$

由这个式子可求出有外加电动势$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\cos\omega t$的电路內的电流

① 在这一节內略去了趋肤效应。

强度。

如果 $\mathscr{E}=0$, 則电路內的电流代表"自由的"电振蕩。这种振蕩的頻率(复数形式)由条件 $Z=0$ 得出,由此得

$$\omega=-i\frac{Rc^2}{2L}\pm\sqrt{\frac{c^2}{LC}-\left(\frac{Rc^2}{2L}\right)^2}. \tag{48.4}$$

根据根号前正負号的不同,我們或者得到衰減振蕩$\left(\text{衰減率为}\ \frac{Rc^2}{2L}\right)$,或者得到純粹的非周期性的衰減放电。在 $R\to 0$ 的极限情况下,我們得到非衰減振蕩,振蕩頻率由熟知的湯姆逊公式得出:

$$\omega=\frac{c}{\sqrt{LC}}.$$

(48.1)式可以直接推广到带有电容器的有几个电感耦合的迴路的系統上。第 a 个迴路內的电流 J_a 与相应的电容器两板上的电荷 $\pm e_a$ 的关系为

$$J_a=\frac{de_a}{dt},$$

代替(48.1)式,我們得到方程組:

$$\sum_b\frac{1}{c^2}L_{ab}\frac{d^2e_b}{dt^2}+R_a\frac{de_a}{dt}+\frac{e_a}{C_a}=\mathscr{E}_a. \tag{48.5}$$

对于周期(单色)电流,这些方程变成代数方程:

$$\sum_b Z_{ab}J_b=\mathscr{E}_a, \tag{48.6}$$

而且矩陣之 Z_{ab} 由下式得出:

$$Z_{ab}=\delta_{ab}\left(R_a+\frac{i}{\omega C_a}\right)-\frac{i\omega}{c^2}L_{ab}. \tag{48.7}$$

电流系統的本征頻率由 $\mathscr{E}_a=0$ 时方程(48.6)的联立条件得出,也即是由下列行列式等于零的条件得出:

$$|Z_{ab}|=0. \tag{48.8}$$

如果电阻 R 不为零，則全部“頻率”有虛数部分，也即是电振蕩是衰減的。

我們注意到，方程(48.5)在形式上与有几个自由度并作着小衰減振蕩的系統的力学运动方程相同。这时起广义坐标作用的是电荷 e_a，起广义速度作用的是电流 $J_a=\dot{e}_a$。系統的“拉格朗日函数”为

$$\mathscr{L}=\sum_{a,b}\frac{1}{2c^2}L_{ab}\dot{e}_a\dot{e}_b-\sum_a\frac{e_a^2}{2C_a}+\sum_a e_a\mathscr{E}_a. \tag{48.9}$$

电流系統的磁能和电能分别起着力学系統的动能和势能的作用，而 $\mathscr{E}_a$ 相应于使系統发生受迫振蕩的外力。R_a 包含在“耗散函数”內：

$$R=\sum_a\frac{R_a\dot{e}_a^2}{2}. \tag{48.10}$$

方程(48.5)与拉格朗日方程相同：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{e}_a}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial e_a}=-\frac{\partial R}{\partial\dot{e}_a}. \tag{48.11}$$

例　題

1. 試求含有自感 L_1 和 L_2 以及电容 C_1 和 C_2 的两个电感耦合迴路內电振蕩的本征頻率；我們略去电阻 R_1 和 R_2 不計。

解. 所求的頻率从下列条件得出：

$$|Z_{ab}|=Z_{11}Z_{22}-Z_{12}^2=0,$$

式中

$$Z_{11}=-i\left(\frac{\omega}{c^2}L_1-\frac{1}{\omega C_1}\right),\quad Z_{22}=-i\left(\frac{\omega}{c^2}L_2-\frac{1}{\omega C_2}\right),$$

$$Z_{12}=-\frac{i\omega}{c^2}L_{12}.$$

由計算給出：

$$\omega_{1,2}^2=c^2\frac{L_1C_1+L_2C_2\mp[(L_1C_1-L_2C_2)^2+4C_1C_2L_{12}^2]^{1/2}}{2C_1C_2(L_1L_2-L_{12}^2)}.$$

两个频率都是純实数，这是略去电阻 R_1 和 R_2 的結果。当 $L_{12}\to 0$ 时，频率 ω_1 和 ω_2 趋近于 $\frac{C}{\sqrt{L_1C_1}}$ 和 $\frac{C}{\sqrt{L_2C_2}}$，这相应于两个迴路分开振蕩。

2. 与上題相同，但电路由电阻 R、电容 C 和自感 L 并联而成。

解. 电路的三个分路的阻抗等于

$$Z_1=R,\ Z_2=\frac{i}{\omega C},\ Z_3=-\frac{i\omega}{c^2}L,$$

分路内的电流的关系式为

$$J_1+J_2+J_3=0,$$
$$Z_1J_1=Z_2J_2=Z_3J_3.$$

由此得到方程：

$$\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}=0,$$

这个方程的解給出

$$\omega=-\frac{i}{2RC}\pm\sqrt{\frac{c^2}{LC}-\frac{1}{4R^2C^2}}.$$

3. 試研究由无限个相同网孔依次串联而成的电路内电振蕩的傳播，网孔的阻抗为

$$Z_1=-i\left(\frac{\omega}{c^2}L_1-\frac{1}{\omega C_1}\right),$$

$$Z_2=-i\left(\frac{\omega}{c^2}L_2-\frac{1}{\omega C_2}\right),$$

电路如图 25 所示。試求电路内电振蕩无衰减地傳播的频率区域①。

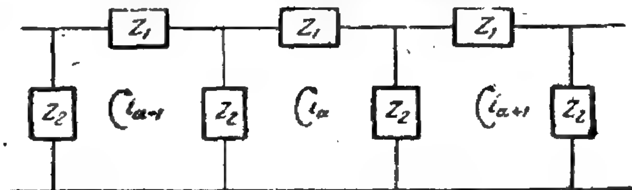


图 25

解. 我們定义电流 i_α 为每一网孔内的迴路电流（图 25）。第 α 迴路的克

① 准稳定态理論应用于这种周期电路的条件是每一网孔的綫度小于“波长” $\frac{c}{\omega}$.

希霍夫方程为

$$Z_1 i_\alpha + Z_2(2i_\alpha - i_{\alpha-1} - i_{\alpha+1}) = 0.$$

这是常系数的綫性差分方程（对整数变数 α 而言）。于是求得它的解的形式为

$$i_\alpha = \text{常数} \cdot q^\alpha$$

对于參量q，我們得到特性方程为

$$q^2 - \left(2 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)q + 1 = 0. \tag{1}$$

設

$$-4 \leqslant \frac{Z_1}{Z_2} \leqslant 0,$$

这相应于 ω^2 的值在

$$\frac{c^2}{L_1C_1} \text{和} \; c^2\frac{4/C_2 + 1/C_1}{4L_2 + L_1}.$$

之間。因此方程(1)有两个复数共軛根，其模量为$|q|=1$。这表明从电路的一个网孔轉到下一个网孔时，电流的振幅不衰减，也即是电振蕩在电路內无衰减地傳播。在这种情况下，如果我們令 $q = e^{ikl}$（l 是电路內一网孔的长度），則 k 为电路內傳播的电振蕩的“波矢量”。按照普遍法則，算出傳播速度 u 为导数：

$$u = \frac{d\omega}{dk}.$$

如果 ω 在所指出的范圍外，則方程(1)有两个实根：q_1 和 q_2；因为 $q_1q_2 = 1$，因而其中一根（設为 q_2）的絕对值小于 1，而另一根（設为 q_1）大于 1。容易看出，这表明电路內的电振蕩不可能无衰减地傳播。为了查明其中的原因，我們来研究一很大而有限长的电路。在电路的起端注入初始振蕩脉冲，而将电路的另一端用某种方式閉合起来。在数学上描写电路一端的閉合性是利用某种边界条件，由这种边界条件，在通解

$$i_\alpha = c_1 q_1^{-(\alpha_k - \alpha)} + c_2 q_2^{-(\alpha_k - \alpha)}$$

（α_k 为电路一端的“坐标”）內，可以求出系数的比值$\frac{c_1}{c_2}$，当通解取上面的形式时，这比值的数量級为 1。但是这时随着$(\alpha_k - \alpha)$的增加，第二項（其中$|q_2| \ll 1$）很快地变得比第一項小。这样一来，差不多在全电路內，除了端点附近的一小段外，解的形式都为 $i_\alpha = c_1 q_1^{-(\alpha_k - \alpha)}$，其中$(i_\alpha)$从电路起端向末端而减小。

应該着重指出，这种衰減不具有耗散吸收的特征(由于电路內无电阻，不存在产生它的原因)；可以把它形象地描写为振蕩脉冲从电路下一网孔反射的結果。

§ 49. 导体在磁場內的运动

在前一节的叙述中，暗中假定了导体在电磁場內是靜止的(对参考系 K 而言，$\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ 等即是在这参考系內定义的)。特别是，电流与电場之間的关系 $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$，一般說来，只适用于靜止的导体。

为了求出运动导体內电流和电場的关系式，我們从参考系 K 变换到另一参考系 K'，其中导体(或者它的某一部分)在所考虑的时刻是靜止的。在这参考系內，我們有 $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}'$，其中 $\mathbf{E}'$ 是 K' 內的电場强度。但是按照熟知的場变换公式，$\mathbf{E}'$ 用 K 系內的場表示为①

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}], \tag{49.1}$$

式中的 $\mathbf{v}$ 为参考系 K' 相对于参考系 K 的速度，也即在現在的情况下，为导体的速度(自然，我們假定它小于光速)。这样一来，我們得到

$$\mathbf{j}=\sigma\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right). \tag{49.2}$$

这也就是确定运动导体內的电流与电場的关系的公式。对于它的推导还必須作如下的說明。从一参考系变换到另一参考系时，我們只是变换了場，而电流 $\mathbf{j}$ 則保持不变。当 $v\ll c$ 时，电流密度的变换可能导至出現高次小的附加項。但在(49.2)式內，由場变换产生的第二项，一般說来不小于第一項，虽然它包含有因子 $\frac{v}{c}$。例

① 参閱"場論"第二版，§ 23。电場强度和磁場强度的微观値用它們的平均值 $\overline{\mathbf{e}}=\mathbf{E}$, $\overline{\mathbf{h}}=\mathbf{B}$ 来代替。

如，如果电場是由交变磁場的电磁感应而产生的，则它的数量級与磁場比較，将多包含一个因子$\frac{1}{c}$。

当导体內有給定的电流流过时，导体內的能量耗散当然可以与导体的运动无关。因此，运动导体单位时間內所放出的焦耳热的密度，用电流密度来表示的式子$\frac{j^2}{\sigma}$，和靜止导体的相同。但代替乘积 $\mathbf{jE}$，我們現在得到①

$$\frac{j^2}{\sigma}=\mathbf{j}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right).$$

由此可見，在运动导体內，$\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]$ 之和为产生傳导电流的“有效”电場强度。因此，在閉合綫电路 C 內所作用的电动势由下列积分給出：

$$\mathscr{E}=\oint_C\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right)d\mathbf{l}. \tag{49.3}$$

按下列方式变换上式。根据麦克斯韦方程：$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$，我們有

$$\oint_C \mathbf{E}d\mathbf{l}=\int_S\operatorname{rot}\mathbf{E}d\mathbf{f}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S\mathbf{B}d\mathbf{f},$$

或者我們用 Φ 表示通过由电流迴路 C 所圍成的 S 表面的磁通量，则

---

① 从这公式看出，当导体在磁場內运动时，导体在 δt 时間內所放出的附加热为

$$\delta t\frac{1}{c}\int\mathbf{j}[\mathbf{vB}]dV=-\frac{1}{c}\int\mathbf{u}[\mathbf{jB}]dV,$$

式中 $\mathbf{u}=\mathbf{v}\delta t$，为 δt 时間內的位移。这量与同一时間內由体积力 $\mathbf{f}=\frac{1}{c}[\mathbf{jB}]$ 对导体所作的功大小相等，而正負号相反，由此可以解釋 198 頁上所指出的表面矛盾。

$$\oint_C \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{v=0}.$$

下角标为 $\mathbf{v}=0$ 的时間导数，表示迴路 C 的位置不变时由磁場的变化所引起的磁通量变化。

在第二項內，我們写出 $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{u}}{dt}$，其中 $d\mathbf{u}$ 为迴路元的无穷小位移。于是

$$\oint_C [\mathbf{vB}]\,d\mathbf{l} = \int \frac{[d\mathbf{u}\mathbf{B}]d\mathbf{l}}{dt} = -\frac{\int_S \mathbf{B}d\mathbf{f}}{dt},$$

式中 $d\mathbf{f}=[d\mathbf{u}\cdot d\mathbf{l}]$ 为电流迴路在时刻 t 与时刻 $t+dt$ 时所占据的两无限靠近位置 C 和 C' 之間的“側”面 S 上的面积元(图 26)。因为通过任何閉合面的总磁通量等于零，因而十分显然，通过“側”面的磁通量，等于通过 C 和 C' 所圍成的表面的磁通量之差。由此可見，

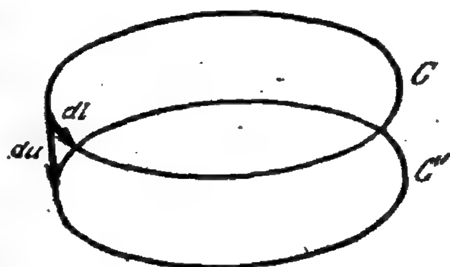


图 26

$$\oint_C [\mathbf{vB}]d\mathbf{l} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{B=\text{常数}},$$

式中对时間的导数表示磁場不变时由导体移动所引起的磁通量变化。

把这两項相加，最后得到

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{49. 4}$$

式中对时間的导数現在表示通过运动迴路的磁通量的总变化。由此可見，由(49. 4)式所表示的法拉第定律，对任何原因引起的磁通量变化都是适用的——无論是由磁場本身的变化引起的［这已在 § 47 內討論过，公式(47 13)］，或由导体的运动所引起的，都是

一样。

在恒定磁場内，磁通量的变化只由迴路的移动所引起。如果迴路运动时迴路上的各点都与磁力綫平行移动，永远不与磁力綫相交，則通过迴路的磁通量也不会改变。这种情况显然是下列事实的必然結果：通过任何閉合面的磁通量为零，而通过由运动迴路所描成的"側"面的磁通量，在这种情况下也恒等于零（因为其中$B_n=0$）。这样一来，可以說，要产生感应电动势，在任何情况下，导体都必須横穿过磁力綫而运动。

在运动导体内的电磁場由下列方程組定出：

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}=\frac{4\pi}{c}\sigma\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right),$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0.$$

将第二式内的 $\mathbf{E}$ 用 $\mathbf{H}$ 表示，并代入第一式，我們得到

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\operatorname{rot}[\mathbf{vB}]=-\frac{c^2}{4\pi}\operatorname{rot}\left(\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{\sigma}\right). \tag{49.5}$$

在电导率σ和磁化率μ为常数的均匀导体内，我們有

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\operatorname{rot}[\mathbf{vH}]=\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\Delta\mathbf{H},\ \operatorname{div}\mathbf{H}=0. \tag{49.6}$$

这些方程推广了 § 45 内得到的結果。

但是，应該指出，如果只有一个导体完整地（即沒有形变）在外磁場内运动，則采用与导体牢固連結的坐标系，可使問題的解答大为簡化。在这种坐标系内，导体是静止的，而外磁場随时間的变化按照給定的定律，于是我們又回到了 § 45 内所研究的傅科电流类型的問題。但是这种变换的可能性并不是由于伽利略（或爱因斯坦）的相对性原理，因为一般說来，新坐标系不是慣性系。这两个問題的等效性是由于上面所指出的电磁感应与引起磁通量变化的

原因无关的結果。用純粹的数学方法可以证明这一点。为此，我們展开表达式 rot$[\mathbf{vB}]$，并考虑到 div $\mathbf{B}=0$ 和导体整个地运动时 div $\mathbf{v}=0$（这等式表示导体的“不可压縮性”）。于是(49.5)式的右边变为

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B}-(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{v}. \tag{49.7}$$

但是这总和不是别的，乃是 $\mathbf{B}$ 对时間的导数，它給出 $\mathbf{B}$ 相对于轉动导体的变化。实际上，头两項之和为对时間的“实在”导数 $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$，这导数給出以速度 $\mathbf{v}$ 运动的点处的 $\mathbf{B}$ 的变化。第三項为 $\mathbf{B}$ 相对于导体的取向的变化：在导体作純粹的平动时（$\mathbf{v}=$常数），它等于零，当导体轉动时（$\mathbf{v}=[\mathbf{\Omega r}]$，其中 $\mathbf{\Omega}$ 为角速度），它等于$[\mathbf{\Omega B}]$。

末了，我們来研究磁化导体轉动时所发生的奇异現象，称为单极感应現象。它的实质是，如果利用两滑动接头（图 27 上的 A 和 B），将一靜止导綫接到轉动的磁体上，則在导綫內就会有电流流过。計算产生这种电流的电动势并不困难。为此，我們首先变换到与磁体一道轉动的坐标系。如果 $\mathbf{\Omega}$ 是磁体轉动的角速度，則在新坐标系內，导綫轉动的角速度为 $\mathbf{\Omega}$（而磁体靜止）。这样一来，我們得到：导体在由靜止磁体所产生的給定恒定磁場 $\mathbf{B}$ 內运动；导体本身所引起的場畸变，我們略去不計。按照(49.3)式，在导綫两端間作用的电动势由下列积分給出：

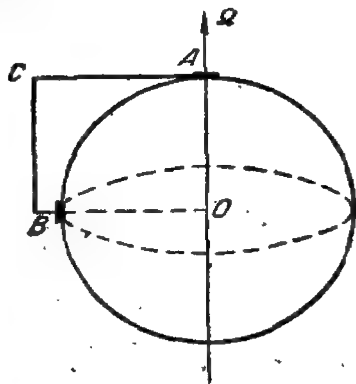


图 27

$$\mathscr{E}=\frac{1}{c}\int\limits_{ACB}[\mathbf{vB}]\,d\mathbf{l}=\frac{1}{c}\int\limits_{ACB}[\mathbf{B}[\mathbf{r\Omega}]]\,d\mathbf{l}, \tag{49.8}$$

并对导綫长度进行积分。由这个公式就可以求出所提問題的解。

例　題

1. 試求在均匀恒定磁場內匀速轉动的导电球的磁矩($\mu=1$)；并求出作用在球上的力矩。

解. 設在靜止坐标系內(z 軸沿角速度矢量 Ω 的方向)，外磁場的分量为 $\mathfrak{H}_x$, 0, $\mathfrak{H}_z$。在与球一起轉动的坐标系 ξ, η, z 內，磁場分量为

$$\mathfrak{H}_\xi=\mathfrak{H}_x\cos\Omega t,\quad \mathfrak{H}_\eta=-\mathfrak{H}_x\sin\Omega t,\ \mathfrak{H}_z$$

或者写成复数形式

$$\mathfrak{H}_\xi=\mathfrak{H}_x e^{-i\Omega t},\quad \mathfrak{H}_\eta=-i\mathfrak{H}_x e^{-i\Omega t},\ \mathfrak{H}_z.$$

由此可見，在 ξ 軸和 η 軸上作用着頻率为 Ω 的交变場，这交变場所感生的磁矩为

$$\mathscr{M}_\xi=V\mathrm{Re}\{\alpha\mathfrak{H}_\xi\}=V\mathfrak{H}_x(\alpha'\cos\Omega t+\alpha''\sin\Omega t),$$

$$\mathscr{M}_\eta=V\mathrm{Re}\{\alpha\mathfrak{H}_\eta\}=V\mathfrak{H}_x(-\alpha'\sin\Omega t+\alpha''\cos\Omega t),$$

式中 $V\alpha$ 是 § 45 例題 1 所求得的球的复数磁极化率。在 z 軸方向，磁場保持不变，因而不产生磁矩($\mu=1$)。磁矩相对于靜止坐标系的分量为

$$\mathscr{M}_x=V\alpha'\mathfrak{H}_x,\ \mathscr{M}_y=V\alpha''\mathfrak{H}_x,\ \mathscr{M}_z=0.$$

由此可見，在本題內，α' 和 α'' 分別給出导电球的平行于和垂直于矢量 Ω, $\mathfrak{H}$ 平面的磁矩分量。

作用在球上的力矩为 $\mathbf{K}=[\mathscr{M}\mathfrak{H}]$。力矩相对于靜止坐标軸的分量为

$$K_x=V\alpha''\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z,\ K_y=-V\alpha'\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z,\ K_z=-V\alpha''\mathfrak{H}_x^2.$$

2. 設一均匀磁化球繞与磁化方向相合的軸而匀速轉动，試求均匀磁化球的一极和赤道間所发生的单极感应电动势(参閱图 27)。

解. 球所产生的磁場对于轉动軸是对称的，而且矢量 $\mathbf{B}$ 处处在子午面內(即矢量 $\mathbf{B}$, Ω 和 $\mathbf{r}$ 是共面的)。由直接的計算可知或簡单地注意到，在恒定場內，$\mathrm{rot}[\mathbf{vB}]$ 和給出矢量 $\mathbf{B}$ 相对于轉动物体的变化的(49.7)式相同。在現在的情况下，場的对称性使这种变化等于零。对轉动軸的 AO 段和半徑 OB 进行积分，我們得到

$$\mathscr{E}=\frac{1}{c}\int_0^a B_0\Omega r\,dr=\frac{B_0\Omega a^2}{2c}$$

(a 为球的半徑，B_0 为球內的磁感应)。在均匀磁化球內(沒有外加磁場)，磁感应和磁化强度的关系由方程 $B_0+2H=0$ [与 (8.1) 式比較] 与 $B_0-H=4\pi M$

得出，由此得到 $B_0=\frac{8\pi M}{3}$。引进球的总磁矩 $\mathscr{M}$，我們最后得到

$$\mathscr{E}=\frac{\Omega\mathscr{M}}{ca}.$$

3. 試求通过閉合綫性电路內的磁通量从某一定值(Φ_1) 变化到另一定值(Φ_2)[不管由任何原因引起)时流过这电路內的总电荷。

解. 所求的总电荷为积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} J dt$，其中 $J(t)$为电路內的感应电流。从数学观点看来，这积分是频率为 $\omega=0$ 的函数 $J(t)$的“傅立叶分量”。因此，它与电动势的相应分量的关系式为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{E}dt=Z(0)\int_{-\infty}^{+\infty}Jdt$$

[参閱(47.3)式]。代入 $Z(0)=R$ (R 为电路对恒定电流的电阻) 和 $\mathscr{E}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{\partial t}$，我們得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}Jdt=\frac{1}{cR}(\Phi_1-\Phi_2).$$

§ 50. 加速度对电流的激发

在前一节內研究导体的运动时，我們忽略了加速度(如果存在的話)可能产生的影响。但是金屬的加速运动，等效于产生一个附加的慣性力作用在傳导电子上。如果 $\mathbf{v}$ 是导体的加速度， 而 m 是电子的质量，則这力等于 $-m\dot{\mathbf{v}}$。它对电子的作用和强度为 $\frac{m}{e}\dot{\mathbf{v}}$ 的电場所产生的作用相同，式中的 $-e$ 是电子的电荷。由此可見，在加速运动的金屬內，作用在傳导电子上的“有效”电場为

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}+\frac{m}{e}\dot{\mathbf{v}}. \qquad (50.1)$$

相应地，电流密度为

$$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}'=\sigma\left(\mathbf{E}+\frac{m}{e}\dot{\mathbf{v}}\right). \tag{50.2}$$

把 $\mathbf{E}$ 用(50.1)式的 $\mathbf{E}'$ 表示,并代入方程

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

(处处令 $\mu=1$),于是

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}'=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}+\frac{m}{e}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{v}}. \tag{50.3}$$

把 $\mathbf{v}$ 写成相加形式:

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}+[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}],$$

式中 $\mathbf{u}$ 为平动速度,而 $\mathbf{\Omega}$ 为导体轉动的角速度。对时間取微分,我們求得加速度为

$$\dot{\mathbf{v}}=\dot{\mathbf{u}}+[\mathbf{\Omega}\mathbf{v}]+[\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{r}]=\dot{\mathbf{u}}+[\mathbf{u}\mathbf{\Omega}]+[\mathbf{\Omega}[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]]+[\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{r}].$$

头两項与 $\mathbf{r}$ 无关,因而在对坐标取微分时等于零。第三項可以写为

$$[\mathbf{\Omega}[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]]=-\operatorname{grad}\frac{[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]^2}{2},$$

因此,它的旋度也变为零。最后,$\operatorname{rot}[\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{r}]=2\dot{\mathbf{\Omega}}$。由此可見,把 $\dot{\mathbf{v}}$ 代入(50.3)式后,我們得到

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}'=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}+\frac{2m}{e}\dot{\mathbf{\Omega}},$$

或者

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}'=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}'}{\partial t}, \tag{50.4}$$

式中已引入符号:

$$\mathbf{H}'=\mathbf{H}-\frac{2mc}{e}\mathbf{\Omega}. \tag{50.5}$$

因为 $\dot{\mathbf{\Omega}}$ 与坐标无关,因而方程

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

仍保持其形式不变，若把其中的 $\mathbf{H}$ 用 $\mathbf{H}'$ 来表示：

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}'=\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}'. \tag{50.6}$$

从(50.4)和(50.6)式內消去 $\mathbf{E}'$，我們得到 $\mathbf{H}'$ 的方程为

$$\Delta\mathbf{H}'=\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{H}'}{\partial t}, \tag{50.7}$$

这个式子和靜止导体內 $\mathbf{H}$ 所滿足的方程相同。

在导体外，磁場滿足方程 $\Delta\mathbf{H}=0$（假定波长大于导体綫度）；而 $\mathbf{H}'$ 也滿足这一方程。

最后，在导体面上，除 $\mathbf{H}$ 外，$\mathbf{H}'$ 也是連續的。不同的只是在无穷远处的条件；这时 $\mathbf{H}$ 趋近于零，而 $\mathbf{H}'$ 趋近于一有限的汲限值 $-2mc\dfrac{\mathbf{\Omega}}{e}$。

由此可見，求非勻速轉动的导体周圍的交变磁場 $\mathbf{H}$ 的問題，与求場强为

$$\mathfrak{H}=-\frac{2mc}{e}\mathbf{\Omega} \tag{50.8}$$

的均勻外磁場內靜止导体周圍的磁場 $\mathbf{H}'$ 的問題完全等效。由后一問題的解 $\mathbf{H}'$ 減去 $\mathfrak{H}$，就可得到所求的导体外的磁場 $\mathbf{H}^{(e)}$。[①]

这样产生的磁場，和任何交变磁場一样，在导体內感生出电流。在单联导体內，这种电流表現为导体获得磁矩。在非勻速轉动的圓环內，这种效应表現为产生电动势（称为斯迪瓦特-托耳曼效应）。

例　　題

1. 試求非勻速轉动球的磁矩（球的半徑为 a）。假定轉动速度很小，以致

① 虽然公式(50.8)內包含角速度 Ω，而不是它对时間的导数，但上面的全部推导以及所得到的結果，只是对非勻速轉动而言。在勻速轉动时由于迴轉磁效应所产生的恒定磁場为一小量，此处我們不予考慮。

透入深度 $\delta \gg a$。

解. 球在磁場$\mathfrak{H}(t)$(50.8)內获得的磁矩为

$$\mathscr{M}=V\hat{\alpha}\mathfrak{H},$$

式中 $\hat{\alpha}$ 为一算符，它对函数$\mathfrak{H}(t)$的傅立叶分量的作用，由§45例題1所得到的公式得出。如果頻率 ω 使 $\delta \gg a$ 則对这一頻率的分量，我們有

$$\mathscr{M}=V\alpha(\omega)\mathfrak{H}\cong -i\omega\frac{4\pi m a^5\sigma}{15ce}\Omega.$$

这个式子改写成下列形式

$$\mathscr{M}=\frac{4\pi m a^5\sigma}{15ce}\frac{d\Omega}{dt}$$

后并不显式地包含 ω，因而对未按傅立叶級数展开的函数 $\Omega(t)$、$\mathscr{M}(t)$，也是适用的(假定它們的展开式內主要只包含滿足上述条件的頻率)。

2. 假設細圓环繞与环面垂直的軸而匀速地轉动，試求匀速轉动停止时細圓环內流过的总电荷。

解. 在§49例題3所得到的公式內，必須把 Φ 理解为 $\mathfrak{H}$ 場的通量(50.8)。于是角速度从 Ω 变化到零时流过細圓环的总电荷为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J\,dt=\frac{2mc}{eRc}\Omega\pi b^2=\frac{m\sigma V}{2\pi e}\Omega$$

(b 为圓环半徑，V 为导綫的体积)。

3. 試求匀速轉动停止时超导圓环內所发生的电流。

解. 从通过圓环的总磁通量不变的条件[参閱(42.5)]，我們得到

$$J=\frac{2mc^2}{eL}\Omega\pi b^2=\frac{mc^2 b\Omega}{2e\left[\ln\frac{8b}{a}-2\right]}$$

(L 的值参閱237頁上的底注)。